责任编辑：韩承训
特约编辑：胡师度
封面设计：文小牛
版面设计：顾求实

数学史菁华（上） 数学小品译丛

四川教育出版社出版 四川新华印刷厂排版
（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行 成都印刷一厂印刷

开本787×960毫米 1/32 印张12 插页4 字数200千
1988年9月第一版 1988年9月第一次印刷
印数：1—1,270册

ISBN7—5408—0719—9/G·711 定价：3.25元

目 录

一、刻痕与哼哈声

一一对应计数法

（许多千年以前）

荷马的传奇故事里说，乌利西斯把独眼巨人波吕斐摩斯的独眼弄瞎以后，便离开了那个独眼巨人的领土①．后来，那个不幸的老巨人每天早晨都要把守在他的洞口，他每放一头母羊出洞，就从一堆石子里捡起一个．然后，晚上母羊回来的时候，他每让一头母羊进洞，就把早晨捡起来的石子扔下一个．这样，如果把捡起来的石子都扔完了，他就能确信他的整个羊群晚上都回来了．

波吕斐摩斯的故事是最早提到一一对应概念是计数基础的文献之一．对于所说的这个原理可以举

① 荷马，古希腊诗人，约在公元前九世纪．乌利西斯，罗马神话中的英雄，在希腊神话中叫做奥德修斯．他是伊塔刻岛王，在特洛伊战争中屡建奇功，尤其是献木马计，使希腊军队取得决定性的胜利．回国途中，误入独眼巨人波吕斐摩斯的洞穴，部分随从被巨人吃掉，最后，他用酒将巨人灌醉，弄瞎了巨人的独眼，才得以脱险．又，希腊神话中的独眼巨人库克罗普斯是个统称，分为四类：第一类是牧人库克罗普斯，最为凶残，以人肉为食，如上面提到的波吕斐摩斯；第二类是巨神库克罗普斯，即提坦；第三类是铁匠库克罗普斯；第四类是瓦匠库克罗普斯．——译注

出许多例证。例如，一份有点叫人毛骨悚然的报告说，有些美洲印第安人曾经把杀死的每个敌人的带发头皮收集起来计算杀死敌人的数目；有些原始非洲猎人，为了证明自己的勇猛，仍然把杀死的每头野猪的獠牙收集起来计数。住在克利门扎若山①坡地上的马塞牧民部族的未婚姑娘，脖子上经常带着铜项圈，其数目等于她们的年龄。英文成语 to chalk one up(记上一笔)起源于早期酒馆伙计的一种习惯，他们用粉笔在石板上画道道来计算顾客喝酒的数量；西班牙文成语echai chinas(扔个石子)则起源于早期西班牙酒馆伙计同样的习惯，他们在顾客的头巾里扔石子计数②。某些原始民族的躯体计数法也是明显的例证，他们用身体的一定部位表示不同的数目。一度广泛流传的筹签又是明显的例证，人们在木签上刻上适当的痕迹藉以记帐；英国财政部所用的筹签作为合法的计数器一直沿用到1826年。古代秘鲁人的记数工具叫做“克伊普”，那是一根长绳，系有各种颜色的绳结。今天的孩子要数还有几天到圣诞节，或者还有几天学校放假，当然就是去查对月份牌上的天数了。现在，几乎任何人随时都有一个小筹签，就是用手指计数。

---

① 非洲最高峰，位于坦桑尼亚东北部。——译注

② 可以设想，顾客进门时可能要把头巾存放在柜台上。——译注

具有数学意义的现存最老的人工制品是一件骨制器柄，上面有按一定数目格式排成的刻痕，柄头中空部位嵌有一块石英石，那是1962年J.德恩兹林在刚果民主共和国爱德华湖岸伊斯杭果钓鱼场发现的，现在称为“伊斯杭果骨”，其年代可以上溯至公元前9000年至6500年之间。但是计数刻痕的意义只能揣测，进行考察的专家们众说纷纭。

许多千年以前，原始人开始在地上或石头上画道道计数，这很可能就是数学史上最早的“菁华”，那时社会已经发展到简单计数必不可少的地步了：一个部落、一个民族、或是一个家庭，要在其成员间分配食物，或者要记录畜群的大小。这一过程是使用一一对应原理的简单刻痕计数法，很可能是书写技术的开端。

可以猜想，对少量收集品计数时，每有一件收集品就伸起一根指头，或是弯下一根指头。对大量收集品的筹码计数，如上面诸例所示，可以收集石子或竹签，可以在地上或石头上画道道，可以在骨头上或木片上刻痕，也可以在绳子上打结。后来，可能演变出各种各样的哼哈声，作为少量收集品的声音计数法。再往后，就演变出各种各样的书面符号（数目字）代表相应的数目。

早期计数法的这种发展过程虽然主要是猜测，但却受到人类学家研究当代原始民族所做报告的支

持，也被世界各地出土的某些人工制品所印证。今天的小孩就是这样开始计数的。

在声音计数的初期，是用不同的哼哈声来表示的，例如**两头**羊和**两个**人。大家想必记得，在英语里我们还在使用team of horses（套在一起工作的马队），span of mules（驾在一起的双骡），yoke of oxen（套在一起的双牛），brace of partridge（一对鹧鸪），pair of shoes（一双鞋）。“二”这个共通性质大概是经过很长时间才达到最后的抽象，即是用没有任何具体关联的某种声音来代表。我们现在的数词很可能本来是指某种具体的对象，但是这些关联，除了“五”和“手”的关联以外，都已湮没无闻了。

某些数词与具体的计数单位的关联，在今天某些原始社会里仍可发现。例如，新几内亚东南部的巴布亚部族有一种独特的计数制度，所以《圣经·约翰福音5:5》的一段“某人有疾三十八年”必须译为“某人卧病一人（20）年、双手（10）年、五年又三年。”还有，由于原始民族靠手指计数，所以手指名称有时实际上用作数词。例如，南美的卡马玉拉部族用“尖指”（中指）这个词作为数词“三”，所以“三天”就说成“尖指天”。此外，南美的德内迪聂印第安人是把手指相继弯下计数的，所以也就有下面对应的数词：

"一"＝"末弯"（小指弯下），
"二"＝"再弯"（无名指弯下），
"三"＝"中弯"（中指弯下），
"四"＝"余一"（只有拇指还伸开），
"五"＝"手完"或"手尽"（指头全都弯下），
"十"＝"双手尽"，
"四天"＝"余一天"。

有趣的是西非的曼丁哥部族用"哥隆托"这个词来表示"九"；这个词的字面意思是"腹中儿将出"，即指怀孕九月。计数的具体情况在马来语和阿兹台克语①中也是很明显的：数词"一"、"二"、"三"的字面意思是"一石"、"二石"、"三石"。同样，南太平洋纽厄人头三个数词的字面意思是"一果"、"二果"、"三果"；爪哇人则说"一粒"、"二粒"、"三粒"。

有些例证说明，哑语，即是适当的手势，可以按一一对应的关系用来计数。例如，巴布亚人有一种躯体计数法；为了表示小的数目，可以按照下面的方式触及身体的适当部位：

1　右小指　　　　12　鼻
2　右无名指　　　13　嘴

① 墨西哥印第安人的语言。——译注

3	右中指	14	左耳
4	右食指	15	左肩
5	右拇指	16	左肘
6	右腕	17	左腕
7	右肘	18	左拇指
8	右肩	19	左食指
9	右耳	20	左中指
10	右眼	21	左无名指
11	左眼	22	左小指

注意，其中除了表示12和13的鼻和嘴以外，有一种镜面反射的关系。

用手势配合声音计数，这在原始民族，甚至先进民族中都是常见的。例如，在某些部族里，说“十”这个词往往要两手一拍，说“六”这个词有时还要把一只手在另一手上一挥。K.孟宁格尔说，对于某些非洲部族，只要看他们是用左手还是用右手开始计数，是把手指伸起还是弯下，是把手掌转向身体还是背向身体，就可以进行种族甄别。

英国人R.马森曾经讲过第二次世界大战时一件逗人的轶事。当时印度和日本处于交战状态。在印度有一个日本姑娘，她的朋友把她介绍给住在印度的一个英国人赫德利先生，为了避免可能出现的尴尬场面，就说她是中国人。那个英国人抱着怀疑态度要求那姑娘用手指数到五，她犹豫了一会儿，

还是数了。后来：赫德利先生放声大笑："您瞧！您看见了吗？您看见她是怎么数的吗？她先把手张开，把手指一个一个地弯下来。您看见过中国人这样数吗？没有的事！中国人数数跟英国人一样：先把拳头攥紧①。她是日本人！"他得意地喊道。

一一对应的观念早就被认定为有限集合的计数基础。德国数学家G。康托从1874年开始，写了一系列非凡的文章，大部分发表在《数学年刊》和《数学杂志》这两份数学刊物上，把上述基本观念应用于无限集合的计数，从而创立了"超限数"的卓越理论。这是数学史上另一个"菁华"，当然是非常晚近的事了，以后将有一讲专门给以适当的论述。

练习

1·1　对讲演中所引巴布亚人对《圣经·约翰福音5:5》那一段的译文做出解释。

1·2　试说明南美卡马玉拉部族为什么用"尖指"作为数词"三"。

1·3　南非的祖鲁人使用下述对应词：

"六"="取拇指"，

"七"="他指示方向"。

你能提出解释吗？

---

① 这位赫德利先生的论据似乎与事实不符。——译注

1·4　苏丹西部的马林凯人用“迪比”这个词表示“四十”，其字面意思是“床垫”。你能加以解释吗？

1·5　在巴布亚新几内亚，数字“九十九”被说成“四人死，两手完，一脚终，又四。”请解释。

1·6　两个集合叫做**等价的**，如果它们可以处于一一对应的状态。证明：

(*a*) 英语字母表全部字母的集合等价于头26个正整数的集合；

(*b*) 所有正整数的集合等价于所有正偶数的集合；

(*c*) 集合之间的等价关系是反身、对称和传递的。

1·7　两个集合如果等价，就说它们具有同一个**基数**。设A是基数为α的集合，B是基数为β的集合，A和B没有公共元素。于是，集合$A\cup B$的基数就叫做α和β的**和**，记为$\alpha+\beta$，这个二元运算叫做基数的**加法**。证明：基数的加法是可交换和可结合的。

1·8　集合A与集合B的**笛卡尔乘积**是指一个集合$A\times B$，其元素是所有的有序对(a, b)，这里a是集合A的元素，b是集合B的元素。如果A的基数是α，而B的基数是β，那么集合$A\times B$的基数就叫做

α和β的积，记为$\alpha\beta$，这个二元运算叫做基数的乘法。证明：基数的乘法是可交换和可结合的，并且关于基数的加法是可分配的。

1·9 证明：由五个元素组成的集合A含有2^5个子集（包括集A本身和空集）。把这个事实推广到任何有限集A的情形。

1·10 设A是具有七个元素的集合，B是具有五个元素的集合。说明集合$A \cap B$与$A \cup B$的元素个数可能具有什么情况，把得到的结果推广到任何两个有限集A和B的情形。

进一步的读物

Menninger, Karl, *Number Words and Number Symbols. a Cultural History of Numbers*. Cambridge, Mass. ;The M. I. T. Press. 1969.

Zaslavsky, Claudia. *Africa Counts. Numbers and Patterns in African Culture*, Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1973.

二、最伟大的埃及金字塔

截头正方形棱锥体积的归纳算法

（约在公元前1850年）

人类最早的几何思想必定是非常古老的，必定是随着人类认识物质形式、比较式样大小的能力的增长，经过多次简单观察潜移默化而产生的。距离的概念，尤其是直线是两点间最短联线的观念，肯定是最不会思考的头脑也不至于无所体验的一个最早的几何概念，因为大多数动物似乎对此都有本能的认识。另一个由于潜移默化而逐渐形成的早期概念，大概应该是三角形和四边形这些简单直线形的概念了。的确，设置周界时先确定诸拐角的位置，然后把相邻的拐角用直墙或篱笆联结起来，看来这几乎是出自本能的做法；筑墙过程中也会逐渐出现铅直线、平行线、垂线这些概念。自然界的千姿百态中许多引人注目的特殊曲线会使人类得到潜移默化的印象，例如太阳和满月的轮廓是圆形的，彩虹和树干的横断面也是如此；即使是最不善于观察的人也会注意到扔石头的抛物线轨迹、藤萝吊挂而成

的悬链线、盘绕绳子产生的螺旋线以及某些植物卷须形成的螺旋线。有些蜘蛛网很接近于正多边形。把石头扔进水池会产生一串逐渐增大的同心圆，许多贝壳上呈现出美丽的螺纹，这些都会使人想到关联曲线族。许多水果和果核呈球形，树干是圆柱体，自然界中圆锥形比比皆是。旋转曲面和旋转体在自然界也可见到，例如西瓜以及陶工旋盘上的工件，有好奇心的人就会得到潜移默化的印象。人类、动物以及许多树叶都具有某种左右对称性。在河岸或泉边把容器灌满水，人们就会碰到体积的概念。仰望夜空，繁星点点，触景生情，就会酝酿出空间以及空间点的观念。

对许多几何观念最初的模糊认识可以叫做"潜移默化的几何"。古代人，就象今天的孩子一样，在他们质朴的艺术作品中运用了这种几何。

当人类的智力能够从一系列具体的几何关系中提出一般的抽象关系，以具体关系作为特例，从而得到几何定律或法则，这时就出现了几何学的第二阶段。例如，让一个小学生去量度画在方格纸上的各种长方形的面积，他只要数一下方格纸上那些长方形内部有几个小正方形，很快就会归纳出：任何长方形面积大概就是它的长和宽的乘积。此外，用卷尺测量若干圆形木盘的周长，那个小学生也会归纳出：任何一个圆的周长比该圆直径的三倍稍大一

点。

再举一个较为复杂的例子。在一个水平的圆形木盘的中心把一根钉子垂直地钉进去一半，在一个有同样半径的木制半球的极点也把一根钉子钉进去一半，然后在圆盘上从钉子开始用一条长度够用的粗线按螺旋形缠起来，直到把圆盘盖满，再用同样粗细的线在半球上围着钉子按螺旋形缠起来，直到把半球盖满，线的长度当然也要够用。于是，把圆盘和半球上缠线的长度加以比较，就会发现半球的线长总是很接近于圆盘线长的两倍，由此可以得到归纳结论：半球的面积是圆盘面积的两倍，或者说球面面积等于其大圆面积的四倍。这个事实是阿基米德首先在公元前三世纪给以严格证明的。随着这样一些实验的出现，几何学曾经成为一门实验科学。

几何学的实验阶段叫做**实验几何**(或称**试验几何**、**经验几何**、**归纳几何**）。追溯既往，就历史所提供的蛛丝马迹，我们已经发现有相当多的实验几何。这种几何似乎在公元前五千年至三千年已出现在古代东方（希腊东方的世界）某些先进地区，有助于工程、农业、商业以及宗教的发展。

有趣的是，公元前600年以前有据可考的全部几何材料实质上都是实验几何，几何学成为一大堆经验法则，有的正确，有的只是大体正确。开一门数

学史课，要花相当多的精力去考察古代巴比伦人、埃及人、印度人以及中国人的几何学的实验性质。作为例证，可以举出古代中国人计算弓形面积的公式，载于《九章算术》① .这部著作的成书时期可以上溯至公元前二世纪，不过，鉴于公元前213年的焚书事件②，可以认为这是后人对一部更加古老的著作所做的复原工作。如图1所示，c表示弓形的弦，s表示弓形矢*．如果从弓形弧的中点作两条割线，在c的延长线上截取的部分都等于s之半，那么凭肉眼判断，弓形面积大致等于那两条割线以及c所在的直线构成的等腰三角形的面积。如果认为这两个面积确实相等，我们就得到古代中国人求弓形面积的公式$A=s(c+s)/2$。把这个公式应用于半圆弓形，容易看出，上述公式等价于取$\pi=3$。这是π的一个近似值，在古代数学著作中屡见不鲜。

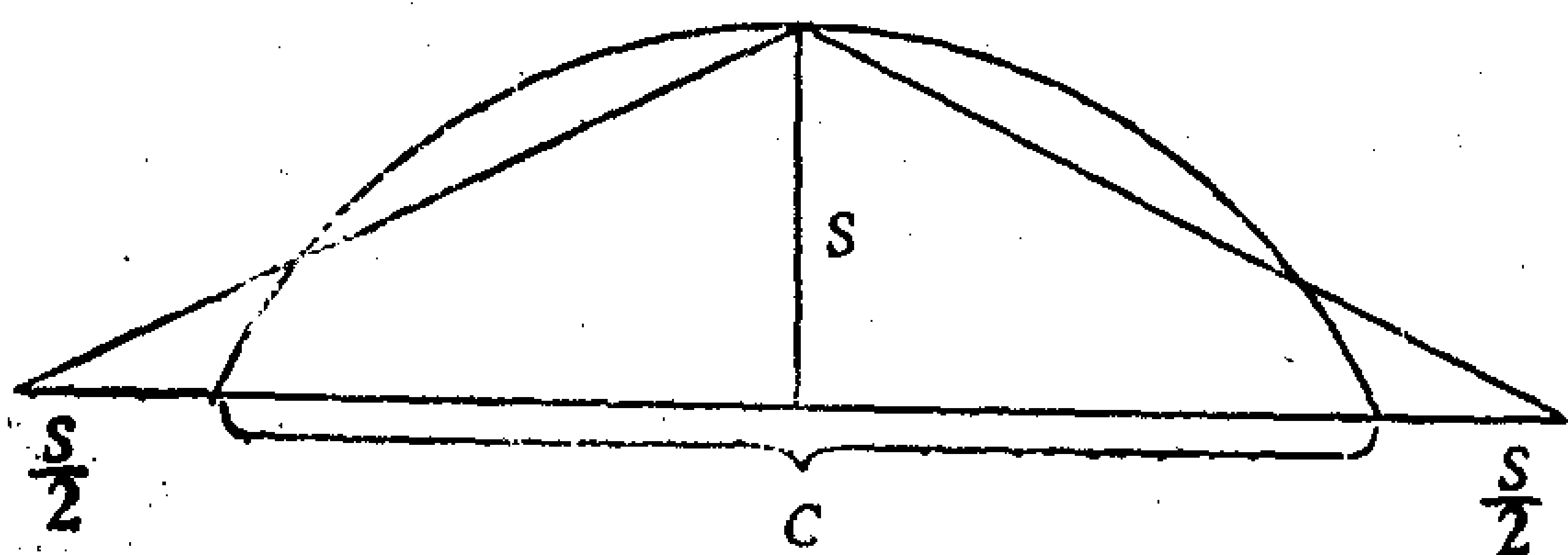


图 1

① 内容是246个应用问题的解法，分为九章：方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股.——译注

② 指秦始皇焚书事.——译注

*）指弓形弦中点到弓形弧中点的距离.——原注

埃及人有一份数学著作叫做《莱恩德古书》，其时期至少可以上溯至公元前1650年，其中可以发现，圆面积被认为等于以该圆直径的九分之八为边长的正方形面积。容易看出，这个经验公式等价于取$\pi=(4/3)^4=3.1604\cdots\cdots$。

在美索不达米亚出土的具有数学意义的陶制铭文中，大多数都表明古代巴比伦人取$\pi=3$，不过最近发现的一件铭文则对π给出了更好的估计：$3\frac{1}{8}=3.125$。这件铭文的时期在公元前1900年至1600年间，是1936年在距巴比伦约200英里的苏萨地区①出土的。

古代几何学的实验性质还有很多其他的例子，几何学中可以由纯实验方法发现的事实，其数量相当可观。

如果要从那些古代流传下来的浩如烟海的实验几何例子中挑出一个可以作为“数学史菁华”的突出例子，最好莫过于考虑《莫斯科古书》的问题14了。《莫斯科古书》是一册数学课本，成书时期约在公元前1850年，内容是25个问题，编书的当时这些问题已经很古老了。这本古书是1893年在埃及搜罗到的，现藏于莫斯科一家博物馆里。在该书的问

① 伊朗西部的古城遗址。——译注

题14中有下述数值例子：

“设有截头金字塔，其垂直高度为6，底为4，顶为2。以此4自乘得16，求4的两倍得8，以2自乘得4。把这些16、8及4相加得28。求6的三分之一得2。求28的两倍得56。瞧，结果是56，可以检验这是对的。”

现在我们该怎样来解释这个例子呢？首先，我们应该知道，按照古代举例说明问题的习惯，总是临时编排一些具体的数字来说明一个一般的步骤。由于所有现存的古埃及金字塔都是正方形正棱锥，所以我们可以认为该问题是考虑一个平截头棱锥（由平行于底面的平面截去顶部的棱锥），其下底是边长$a=4$的正方形，上底是边长$b=2$的正方形，其高度$h=6$。该问题叫我们依次求出$a^2=(4)(4)=16$，$ab=(4)(2)=8$，$b^2=(2)(2)=4$，接着叫我们求出和数$a^2+ab+b^2=16+8+4=28$，然后再叫我们求出$\frac{1}{3}h=\frac{1}{3}(6)=2$。最后，叫我们算出乘积$\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)=(2)(28)=56$。可是，这个乘积正好就是上述平截头棱锥的体积，因为任何平截头棱锥体积的正确公式是

$$V=\frac{1}{3}h(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2),$$

其中B_1表示下底面积，B_2表示上底面积，h表示高

度。

现在让我们停一下，假定我们对问题14的解释是正确的，我们来看看上述例证有什么不同凡响之处。古代巴比伦人已经知道，梯形（视为截头三角形）的面积是两底之和之半再乘以高，他们仿照这个结果认为，平截头棱锥的体积也就是两底面积之和之半再乘以高，用上面引进的符号写出来就是

$$V=\frac{1}{2}h(B_1+B_2).$$

认为这个公式会给出平截头棱锥的体积，这个猜测是合乎常情的，但这个公式却是不对的。要求出平截头棱锥的体积，我们当然可以料想是高度h乘以面积B_1和B_2的某种平均值。但B_1和B_2的算术平均值$\frac{1}{2}(B_1+B_2)$是不对的，这里需要的是B_1和B_2的赫隆平均值①，即

$$\frac{1}{3}(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2),$$

这一点不是很显然的。《莫斯科古书》问题14的古埃及作者，不知何故竟然未落入古巴比伦人的窠臼，做出了正确的猜测。这个归纳算法肯定是几何学上一件真正非凡的经验工作。在E. T. 贝尔看来②，这个结果真是不同凡响，所以他把《莫斯科古书》

① 赫隆，公元前三世纪希腊数学家.——译注

② 贝尔，当代数学史家.——译注

的问题14叫做“最伟大的埃及金字塔”，他认为问题中涉及的归纳算法较之今日仍旧巍然耸立的任何一座由巨石堆砌而成的古埃及金字塔要雄伟得多。这是一件“数学史菁华”。

练习

2·1 (*a*) 详细复述讲演正文中得到古代中国人的弓形面积公式时所述全部经验步骤。

(*b*)证明：用这个公式来计算半圆弓形的面积等价于取$\pi=3$。

(*c*)利用弓形弦和弓形矢s推导计算弓形面积的正确公式。

2·2 (*a*)证明：古代埃及人求圆面积的方法等价于取$\pi=(\frac{4}{3})^4=3.1604\cdots\cdots$。

(*b*)把边长为9单位的正方形各边三等分，然后切掉四个三角形犄角，从而得到一个八边形，其面积，凭肉眼可见，与正方形内切圆的面积相差甚微。证明：这个八边形的面积是63平方单位，由此可见内切圆面积与边长为8单位的正方形面积相差不多。《莱恩德古书》中问题48附有一幅草图，可以作为证据，说明埃及人计算圆面积的公式可能就是这样得到的。

2·3　1936年在苏萨地区出土的一件古代巴比伦陶制铭文上说，正六边形周长与其外接圆周长之比是$\frac{57}{60}+\frac{36}{3600}$。证明：由此可得$3\frac{1}{8}$是$\pi$的近似值。

2·4　求平均值的思想在经验工作中是屡见不鲜的。例如，在《莱恩德古书》中，我们发现，边长依次为a，b，c，d的四边形面积为

$$K=\left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right).$$

(a)证明：对于所有非长方形的四边形，上述公式给出的结果偏大。

(b)假定埃及人的上述公式是对的，证明：三角形的面积就可以表为两边之和之半再乘以第三边之半。用这个公式来计算三角形面积是不对的，这是在现存的一份埃迪夫契约中发现的，其时期约在《莱恩德古书》之后1500年。

2·5　有一件巴比伦铭文，据信其时期约在公元前2600年，其中有下述记载，试给以解释：

“圆周长60，矢长2，求弦长。

“你不知道吗？2的两倍得4，20减去4得16，求20的平方得400，求16的平方得256，400减去256得144，求144的平方根得12，这就是弦长。步骤如此。”

2·6 《萨尔瓦萨特拉》①是古印度的宗教著作，时期约在公元前500年，在数学史上有重要价值，因为其中载有建造祭坛的一些几何规则，表现出对毕达哥拉斯定理②的了解。那里提出的规则中有“圆改方问题”的几个经验解法，相当于 $d=(2+\sqrt{2})s/3$ 以及 $s=13d/15$，这里 d 表示圆的直径，s 表示等价正方形的边长。这些公式相当于 π 取什么值？

2·7 若 m 和 n 是两个正数，我们定义 m 和 n 的**算术平均值、赫隆平均值与几何平均值**分别为 $A=(m+n)/2$，$H=(m+\sqrt{mn}+n)/3$，$G=\sqrt{mn}$。证明：$A\geq H\geq G$，等式成立的充要条件是 $m=n$。

2·8 利用棱锥体积的熟知公式（体积等于底面积乘高的三分之一）证明：任何平截头棱锥的体积是其两底面积的赫隆平均值乘以高度。

2·9 设 a，b 和 h 分别表示平截头正方形正棱锥 T 的下底的一边、上底的一边以及高度。把 T 分成：(1) 一个长方体 P，上底为 b^2，高为 h；(2) 四个直角三角形棱柱 A，B，C，D，每一个的体积都是 $b(a-b)h/4$；(3) 四个正方形棱锥 E，F，G，H，每一个的体积都是 $(a-b)^2h/12$。于是得到 T 的

---

① 印度最早的梵文几何典籍，论述了五个祭坛的营建与测量。——译注。

② 即是“商高定理”。——译注

体积公式

$$V=h(a^2+ab+b^2)/3。$$

2·10 考虑练习2.9中平截头棱锥T的分解。把P水平地切成三个相等的部分，每一部分的高度都是$h/3$，其中一个切片记为U。把A，B，C，D拼成一个长方体Q，底面积为$b(a-b)$，高为h，把Q水平地切成三个相等的部分，高度都是$h/3$。把E，F，G，H换成一个长方体R，底面积为$(a-b)^2$，高为$h/3$。把P的一个切片同Q的一个切片拼成一个长方体V，底面积为ab，高为$h/3$。把P的一个切片、Q的两个切片以及R一起拼成一个长方体W，底面积为a^2，高为$h/3$。于是，T的体积等于U，V，W这三个长方体体积之和，利用这个事实求出练习2.9中T的体积公式。由此可以想见，《莫斯科古书》问题14的步骤可能就是这样得到的。

进一步的读物

Gillings, R. J., *Mathematics in the Time of the pharaohs*. Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press, 1972.

Neugebauer, Otto, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2nd ed. New York: Harper & Row, 1962.

三、从感性认识到理性认识

演绎方法进入数学

（约在公元前600年）

约在公元前600年，几何学进入第三个发展阶段。数学史家一致认为，这一进展应归功于那个时期的希腊人，而最早的开创性工作则属于迈里特斯城的塞利斯，他是古代的“七贤”之一。塞利斯早年似乎经商，积累颇殷，所以后半生主要致力于学问和旅游。他到过埃及，回国后使迈里特斯人了解到埃及人的几何成就。他那多面手的才华使他声誉鹊起，赢得政治家、谋士、巧匠、货殖家、哲学家、数学家及天文学家的美名。他是数学史上第一个名垂青史的人物，也是第一个对演绎几何有所发现的人物。下述初等结果是他的功绩：

1. 圆的任何直径把该圆二等分。
2. 等腰三角形两底角相等。
3. 两条相交直线构成的对顶角相等。
4. 两个三角形若有两双对应角和一双对应边相等则全等。

5. 半圆的弓形角为直角。

上述五个结果无疑是塞利斯时代之前早已知道的了，这些结果都容易用实验方法得到，所以它们的价值不应以其内容来衡量，而应该考虑到塞利斯是利用逻辑论证而不是凭直观和实验来确立各个结果的。以第三个结果为例，这是很容易用实验方法验证的，只要用剪刀剪出一双对顶角，把一个角叠在另一个角上就行了。可是，塞利斯当初论证这个结果的方式，多半跟我们今天第一堂几何课上的讲法一样：如图 2 所示，我们要证明角x＝角y；既然

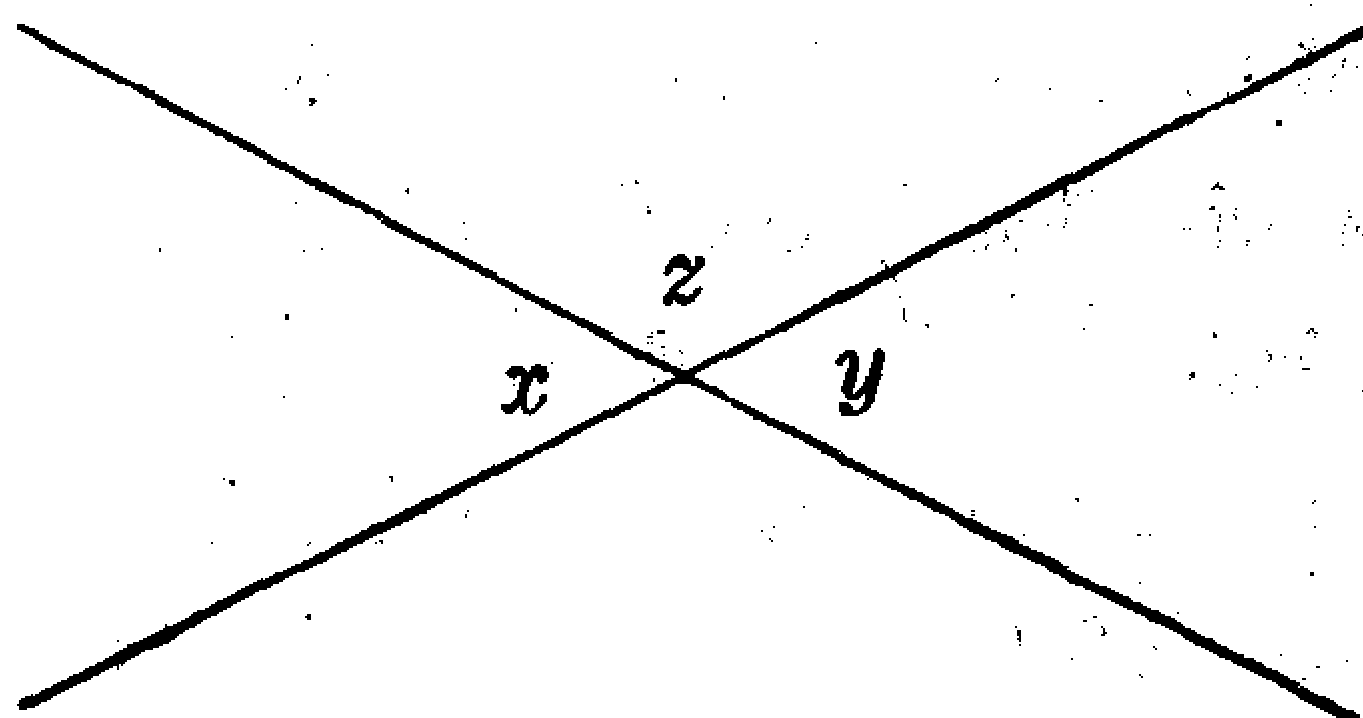


图 2

角x是角z的补角，角y也是角z的补角，可见角x＝角y，因为与同一个量相等的诸量彼此也相等。所要的结果是从一个更基本的结果出发，经过一连串演绎推理得到的；这种几何就叫做**演绎几何**（**辨证几何或有机几何**），自公元前600年起得到希腊人的大力研究。这些古希腊人把几何结果以及所有的数学结果从感性认识发展到理性认识，这种苦心孤诣、精雕细琢的成就肯定是数学史上的一个“菁华”；如果

传说无误，那么迈里特斯城的塞利斯就是开山鼻祖。

那个时代的所有民族中，为什么单单是希腊人断定几何事实的确定应该依据逻辑论证而不是凭实验方法？这个问题有时叫做“希腊之谜”。学者们一直试图对希腊之谜提供解释，虽然任何一种解释本身都不完全令人满意，不过所有这些解释总起来也许还是可以接受的。最常见的解释是在古希腊人特别偏爱在哲学上寻根究底这方面寻找理由。在哲学上关心的是从假定的前提推出必然的结论，而经验方法则只能衡量所考虑结果成立的可能性。哲学家正是发现演绎推理才是他们必不可少的工具，所以希腊人开始考虑几何问题时自然偏爱这种方法。

对希腊之谜的另一种解释就是古希腊人的爱美之心，这在他们的艺术、书法、雕塑和建筑中都是一目了然的。由于对美的欣赏既是感性体验也是理性体验，所以按照这种观点，演绎论证中表现出来的那种井然有序、连贯一致、完美无缺和坚信不移都是令人心驰神往的美感了。

希腊之谜也可以在古希腊以奴隶制为基础的社会性质中找到进一步的解释。特权阶级养尊处优，靠广大奴隶阶级为他们从事商业、工业和家务劳动，奴隶们既做细活也做粗活。这种奴隶制基础自然助长了理论脱离实际，使特权阶级的成员偏爱演绎和

抽象、蔑视实验和实际应用。

最后这种解释可能主要在于概括了当时发生的种种经济和政治的变革：迎来了“铁器时代”，发明了字母表，铸造钱币，取得了地理发现，一个新型的文明世界正喷薄欲出。小亚细亚沿岸以及后来的希腊本土、西西里岛和意大利海岸新兴商埠如雨后春笋，那里的人民高瞻远瞩、浮想联翩，正是他们培育出了这种新文化。在唯理主义的气氛日益浓郁的条件下，人们开始提出“如何”以及“何以”的问题。经验方法完全足以回答如何的问题，但却不足以回答何以的问题，所以尝试使用辨证方法必定是不可阻挡的趋势，其结果是现代学者们视为数学基本特征的演绎特色便崭露头角。

对于希腊之谜的解释不管哪一种对，有一点是必须承认的，那就是古希腊人把几何变成了与他们前辈传下来的那一堆经验规则迥然不同的东西。此外，最初的演绎思想是在几何领域而不是在代数领域提出的，这个事实开创了数学史上持续到相当近代的一个传统。

如果说希腊人摒弃了数学史上所有初步的经验方法和实验方法，那是不可想象的，因为很可能，如果没有这样或那样的某些初步的经验工作，就不会发现什么有意义的数学事实。一个数学命题可以用演绎方法来证明或否定，首先就要把该命题推测

出来，而推测无非就是按照直观、观测、类比、实验或其他形式的经验方法来判断多少是有点道理的一种猜想而已。演绎过程是一种令人信服的阐述形式，但几乎不是什么发现事实的工具；它是一套结构复杂的机器，需要有加工的原料，而原料通常是凭经验考虑提供的。甚至演绎证明或反证中采用的步骤也不是靠什么演绎装置给予指令，而必须靠试验、纠错、经验以及敏锐的猜测获得。实际上，"能掐会算"的技艺正好是一个当之无愧的数学家必须具有的重要品质之一。这里要紧的是，希腊人坚决主张：一个猜测的或试验得到的数学命题一定要用严格的演绎证明或反证加以彻底的检验；无论多少实验核证都不足以确立个命题。

要在几何上做出成绩，不论是创新者还是解题人，都一定要进行实验，画许多图来检验，这样试一下，那样试一下。伽利略（1564—1642）在1599年试图确定摆线* 一拱的面积，他的办法是用与母圆大小一样的若干圆板作为砝码来称一个摆线板。由于他的台秤不大精确，所以他的结论也不准确：一拱的面积很接近圆面积的三倍，但并不恰好相等。1644年，他的学生E。托里切利（1608—1647）利用早期的积分法提出第一个发表出来的数学证明：

---

* 摆线是一个圆沿直线滚动而不滑动时圆周上一个定点的轨迹。——原注

一拱的面积正好是母圆面积的三倍。

B. 巴斯卡尔（1623—1662）很小的时候就“发现”三角形诸角之和是一个平角，他用的办法是把纸三角形折叠起来的简单实验。

阿基米德（公元前287？—212）在其专著《方法》中讲到他最初是怎么利用机械考虑认识到球的体积是$4\pi r^3/3$，这里r是球的半径。但是阿基米德的数学良心使他无法承认他的机械论证是一个证明，因而才提出一个严格的证明。

实际制作一个正圆锥，用沙子把它填满三次，然后把沙子倒进同样半径同样高度的一个正圆柱中，就可以推测到：正圆锥的体积等于其高度乘以底圆面积的三分之一。

变分法中有关极大、极小问题的许多第一流的推测，最初都是由肥皂泡实验得到的。

我们不应反对实验以及实验方法，因为很多几何事实无疑都是用这种办法“发现”的。当然，一个几何推测一旦提出，就应该象阿基米德那样，用演绎推理加以证明或反驳，从而对问题给以一种确定不移的彻底解决。不少几何推测就是靠精细绘图的结果或对某些极端情形进行实验而遭到摒弃的。

提出几何推测有一种富有成果的方法，就是类比法，不过必须承认，这样提出的推测有很多最后证明是不对的。空间几何的大量事实就是从平面的

相似情况通过类比发现的；在高维空间的几何中，类比也起着非常成功的作用。

生物学家曾经精辟地提出过一条著名规律，即是"个体发育是种系发育的重演"，这不过是说，一般而言，"个体重复种系的演化"。有一条教学法原理就是据此提出来的，即是，至少大致而言，学生学习一门课基本上应遵循该主题按年代发展的顺序。以几何为例，我们已经讲过，在历史上，几何发展经过三个阶段，首先是潜移默化的几何，然后是实验几何，最后是辨证几何。因此，上述教学法原理就是主张几何先应以潜移默化的形式介绍给儿童，多半是通过简单劳作以及对自然界的简单观察。这样，儿童们就会潜移默化地领悟到大量的几何观念，例如距离、角度、三角形、四边形、铅直线、垂线、平行线、直线、圆、螺旋线、球、柱、锥，等等。然后，稍晚一些，就应该使这种潜移默化的基础演变为实验几何，这时学生就可以利用圆规直尺、刻度尺和量角器、剪刀和浆糊以及简单的模型等等进行实验，从而归纳出相当多的几何事实。再往后，学生已经足够成熟的时候，就可以用辨证形式或演绎形式来介绍几何学，而且可以指出前一过程的优缺点。

今天我们中学几何教学大纲最弱的部分似乎在几何的第二阶段，即实验阶段；这一阶段没有安排

足够的时间，而经验几何，即实验几何，却有很多可讲的东西。这一阶段花费的时间有助于巩固学生对许多几何观念的掌握，可以向他们说明学习数学上某些初步的归纳过程的重要性与必要性，同时指出这种结果如果没有严格的论证为后盾会有什么缺点。为了使这一阶段的几何教学更加广泛、更有价值，中学教师需要做的事就是注意搜集简单而有意义的几何实验，使用价廉易造的模型。把这些实验汇集成册，有志于此的人是很值得一试的。

练习

3·1 印度数学家厄里亚巴达长老在六世纪初写过一首诗，由33对骈句组成，叫做“伽尼塔”，下面是其中两对骈句的译文：

三角形面积为高乘底之半；六棱体体积为面乘高之半。

半圆周乘以半直径为圆面积；圆面积乘以其平方根为球体积。

试说明在每一对骈句中厄里亚巴达在二维都对，在三维都不对。我们指出，在希腊人引进演绎推理之后很久，印度数学仍然是经验数学。

3·2 塞利斯在埃及时曾据阴影算出金字塔的高度而名噪一时。这件事有两种说法。早期的说

法是亚里斯多德的学生海若尼玛斯讲的，说塞利斯是在人的阴影等于其高度时测量出金字塔阴影之长，从而确定出金字塔的高度。后期的说法是普鲁塔克①讲的，说塞利斯竖立起一根棍子，然后利用相似三角形。这两种说法都没有提到一个真正的难点，即在每种情形下如何得到金字塔阴影之长，也就是金字塔顶端阴影点到金字塔底部中心的距离。

上述未予说明的难点产生了所谓的"塞利斯难题"：想出一种确定金字塔高度的方法，只靠阴影观测和相似三角形，不依赖于纬度和一年一日的特定时刻。（有一种干净利落的解法，利用两次阴影观测，其间相距几小时。）

3·3 假设横截两条平行线构成的一双内错角相等，试证明下述命题：

(a) 三角形诸内角之和等于一个平角。

(b) 凸n边形诸内角之和等于$n-2$个平角

3·4 假定矩形面积等于长乘宽，试证明下面一连串定理：

(a) 平行四边形面积等于底乘高。

(b) 三角形面积等于任何一边与该边上高度之积之半。

(c) 直角三角形面积等于勾股之积之半。

(d) 三角形面积等于其周长与内切圆半径

① 希腊传记作家，46？——120？。——译注

之积之半。

(*e*) 梯形面积等于其高度乘以两底之和之半。

(*f*) 正多边形面积等于其周长与边心距*之积之半

(*g*) 圆面积等于其周长与半径之积之半。

3·5 假设：(1) 圆心角由其所截的弧量度，(2) 三角形诸角之和等于一个平角，(3) 圆的切线垂直于过切点的半径，试证明下面一连串的定理：

(*a*) 三角形的外角等于两个不相邻内角之和。

(*b*) 圆周角由其所截之弧之半量度。

(*c*) 半圆弓形角是直角。

(*d*) 圆的两条相交弦构成的角由其所截两段弧之和之半量度。

(*e*) 圆的两条相交割线构成的角由其所截两段弧之差之半量度①。

(*f*) 圆的切线与过切点的弦构成的角由所截之弧之半量度。

(*g*) 圆的切线与相交割线构成的角由所截

---

*) 正多边形的边心距是中心到任何一条边的垂距. —— 原注

① 注意，交点应在圆外. ——译注

两段弧之差之半量度。

(h) 圆的两条相交切线构成的角由所截两段弧之差之半量度。

3·6 通过折叠纸三角形的简单实验，由经验证明：三角形诸角之和是一个平角。

3·7 要把一个圆心角AOB三等分，有人提出把弦AB三等分，然后把三等分点与O联结起来。这种作法对于小的角看起来象是有理，但是考虑一个几乎等于180°的角，这种作法就显然不对了。试给以说明。

3·8 两把梯子，一把长60呎，一把长40呎，分别横跨两座大楼之间的通道，相向斜靠在两对面，梯脚顶住墙根，如果两梯在通道上方10呎处交叉，试问通道有多宽？

由作图求近似解。对这个问题的代数处理需要解一个四次方程。若a和b表示两梯的长度，c表示两梯交叉处的高度，x表示通道的宽度，则可证明

$$(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}+(b^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}=c^{-1}$$

3·9 设F，V，E分别表示一个多面体的面数、顶点数和棱数。对于四面体、立方体、三棱柱、五棱柱、正方形棱锥、五边形棱锥、切掉一角的立方体、立方体一个面上接上一个正方形棱锥这些情形，我们都发现$V-E+F=2$。你是否觉得这个

公式对所有多面体都成立？

3·10 有些凸多面体，其所有的面都是三角形（例如四面体），有些，所有的面都是四边形（例如立方体），有的，所有的面都是五边形（例如正十二面体）。你是否以为可以继续这样列举下去？

3·11 (*a*) 考虑凸多面体P，设C是其中一个内点。我们可以设想P中有一种适当的不均匀分布的质量，使得P的重心与C重合。如果把这个有重量的多面体扔到水平地面上，最后它就会静止不动，有一面靠在地面上（否则我们就会得到永动现象）。试说明这种考虑可以产生下述几何命题的一种机械论证："给了凸多面体P及其中一个内点C，则P有一个面F，使得从C到F所在的平面上画垂线，其垂足在F的内部。"

(*b*) 对 (*a*) 中的命题给以几何证明。

3·12 考虑一个椭圆，其半轴为a和b。如果$a=b$，则椭圆变成一个圆，而

$$P=\pi(a+b) \quad 和 \quad P'=2\pi(ab)^{\frac{1}{2}}$$

这两个式子都变成$2\pi a$，即是圆的周长，由此可以设想，P或P'可能是任何椭圆的周长E。试给以讨论。

3·13 如果一条跑道的内圈是一个非圆形的椭圆，跑道的宽度是常数，则跑道的外圈是否也是

鞝圆？

3·14 三角形三条高线共点。四面体的四条高线是否也共点？

3·15 试提出三维空间中与下述平面定理相似的定理：

(*a*) 三角形的三条角平分线共点，其交点是三角形内切圆的圆心。

(*b*) 圆面积等于一个三角形的面积，这三角形的底边与圆周等长，其高等于圆半径。

(*c*) 等腰三角形高线的垂足是该三角形底边的中点。

进一步的读物

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, tr. by Arnold Dresden. New York: Oxford University Press, 1961; New York: John Wiley, 1963 (paperback ed.).

四、第一个名副其实的定理

毕达哥拉斯定理

（约在公元前540年）

初等几何中最引人注目、肯定也是最著名最有用的一个定理，就是所谓的**毕达哥拉斯定理**："在任何直角三角形中，斜边上的正方形等于两条直角边上的正方形之和。"如果有一个定理可以当之无愧地算是数学史上的一件"菁华"，那么毕达哥拉斯定理大概就是主要的候选者了，因为它可能是数学史上第一个真正名副其实的定理。但是，当我们开始考虑该定理的渊源时，心里总觉得不是那么很踏实，虽然传说是把这个著名的定理归功于毕达哥拉斯，但是二十世纪对美索不达米亚出土的陶器铭文上的楔形文字考察的结果表明，早在毕达哥拉斯时代之前的一千多年间，古巴比伦人就已经知道该定理了。在古代印度和中国的有些著述中也可以见到对该定理的了解，这些著述的时期至少可以上溯至毕达哥拉斯的时代。不过，在提到这个定理的那些非古希腊文献或古希腊前的文献中，都没有对上述

关系的证明；很可能是毕达哥拉斯或他那著名的“哥老会”的某个成员，第一个对该定理提供了合乎逻辑的演绎证明。

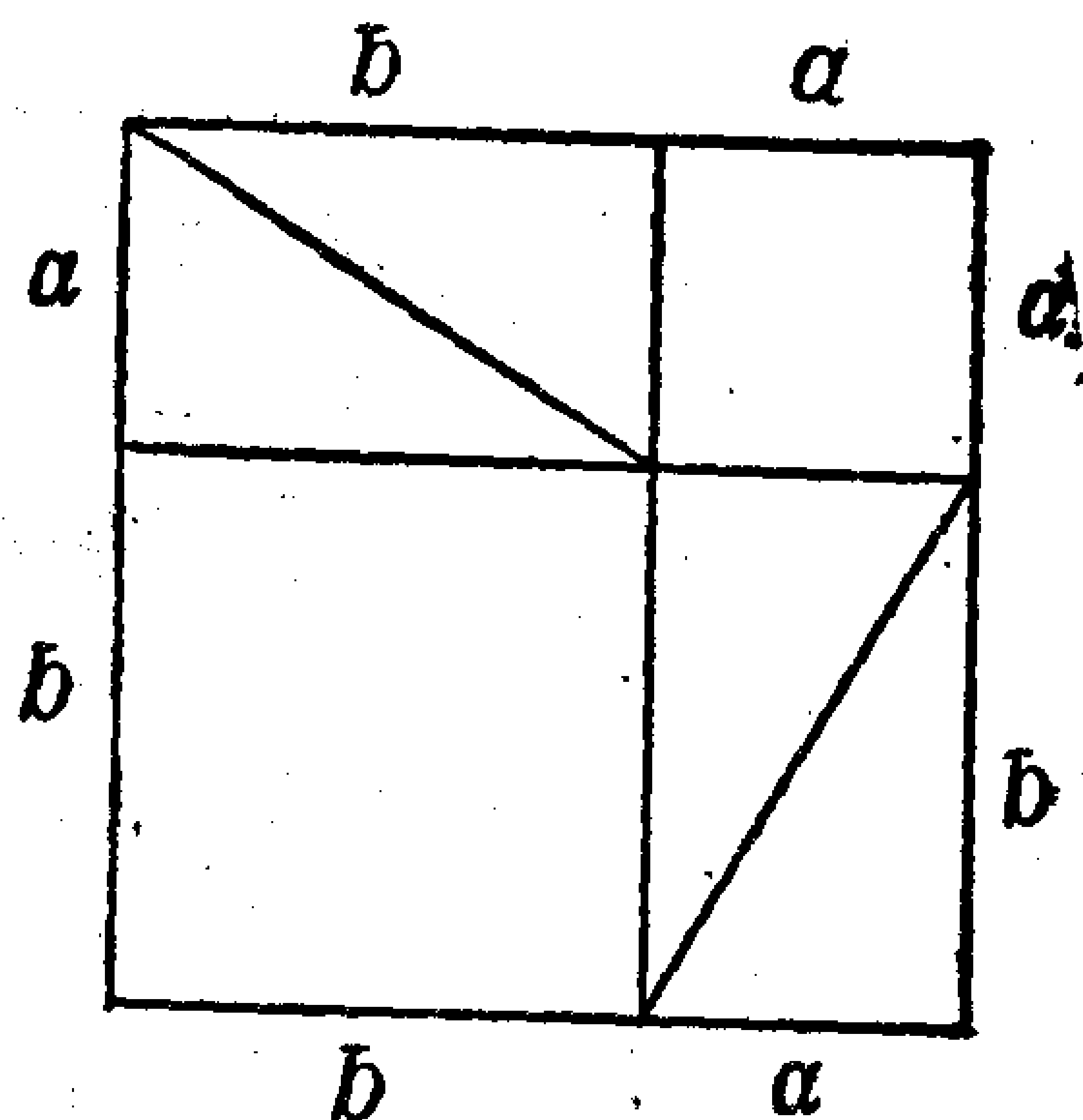
现在让我们停一下，对毕达哥拉斯及其半神秘的哥老会讲点东西。毕达哥拉斯是数学史上第二个名垂青史的人。透过古代神秘的烟雾，我们可以推断毕达哥拉斯约生于公元前572年，出生地是爱琴海的萨莫斯岛，与著名的塞利斯的故乡迈里特斯城相距不远。毕达哥拉斯大约比塞利斯小五十岁，又跟他住得很近，所以很可能曾在这位老者的门下受业。无论如何，他跟塞利斯一样，有一个时期曾经旅居埃及，后来纵情于更加广泛的旅游，很可能远至印度。他浪迹两年之后回归故里，发现萨莫斯岛正处于“多头政治”的暴政之下，爱奥尼亚地区[①]大部分处于波斯统治下，所以他移居希腊海港城市克罗多纳（现位于意大利南部靴形地区），他在那里建立了著名的毕达哥拉斯学派。这个学派不仅是研究哲学、数学和自然科学的学术团体，而且还发展成组织严密的“哥老会”，有秘密的仪式和章程。最后，这个哥老会的政治势力和贵族倾向咄咄逼人，所以意大利南部的民主势力捣毁了该学派的建筑物，使这个组织分崩离析。据传，毕达哥拉斯亡命

① 小亚细亚海岸古地名，包括许多岛屿。——译注

于美塔庞通，以75岁或80岁的高龄在那里终其一生，可能是追踪者暗杀的结果。这个哥老会的成员虽然都作鸟兽散，但仍继续活动了至少两个多世纪。

毕达哥拉斯的哲学，在风格上有印度渊源，其基本假设是：全体正整数是人类和物质千差万别的诱因；简言之，全体正整数控制着大千世界的质与量。正整数的这种观念和升华促使他们进行深入的研究，因为，谁知道呢，也许由于揭示出整数的奥妙性质，人类说不定就有办法在某种程度上支配或改善自己的命运呢。因此，他们加紧了数的研究，而由于数与几何紧密相关，也加紧了几何的研究。因为毕达哥拉斯的讲授纯系口述，而且哥老会的惯例是把所有的发现都归功于至尊开山祖师，所以现在很难弄清哪些数学发现应该算是毕达哥拉斯本人的功绩，哪些应该归在哥老会其他成员的名下。

现在回过头来再讲所说的那件数学史上的“菁华”，我们自然很想知道，对于以毕达哥拉斯命名的那个名副其实的定理，他可能给出的证明其性质如何？对此有很多推测，一般认为大概是一种分解式的证明，如下所述。设a，b，c表示已知直角三角形的勾、股、弦，考虑图3所示两个正方形，都以$a+b$为一边。第一个正方形被分解成六块，即是分别以勾、股为边的两个正方形以及与已知三角形全等的四个直角三角形。第二个正方形被分解成五块，



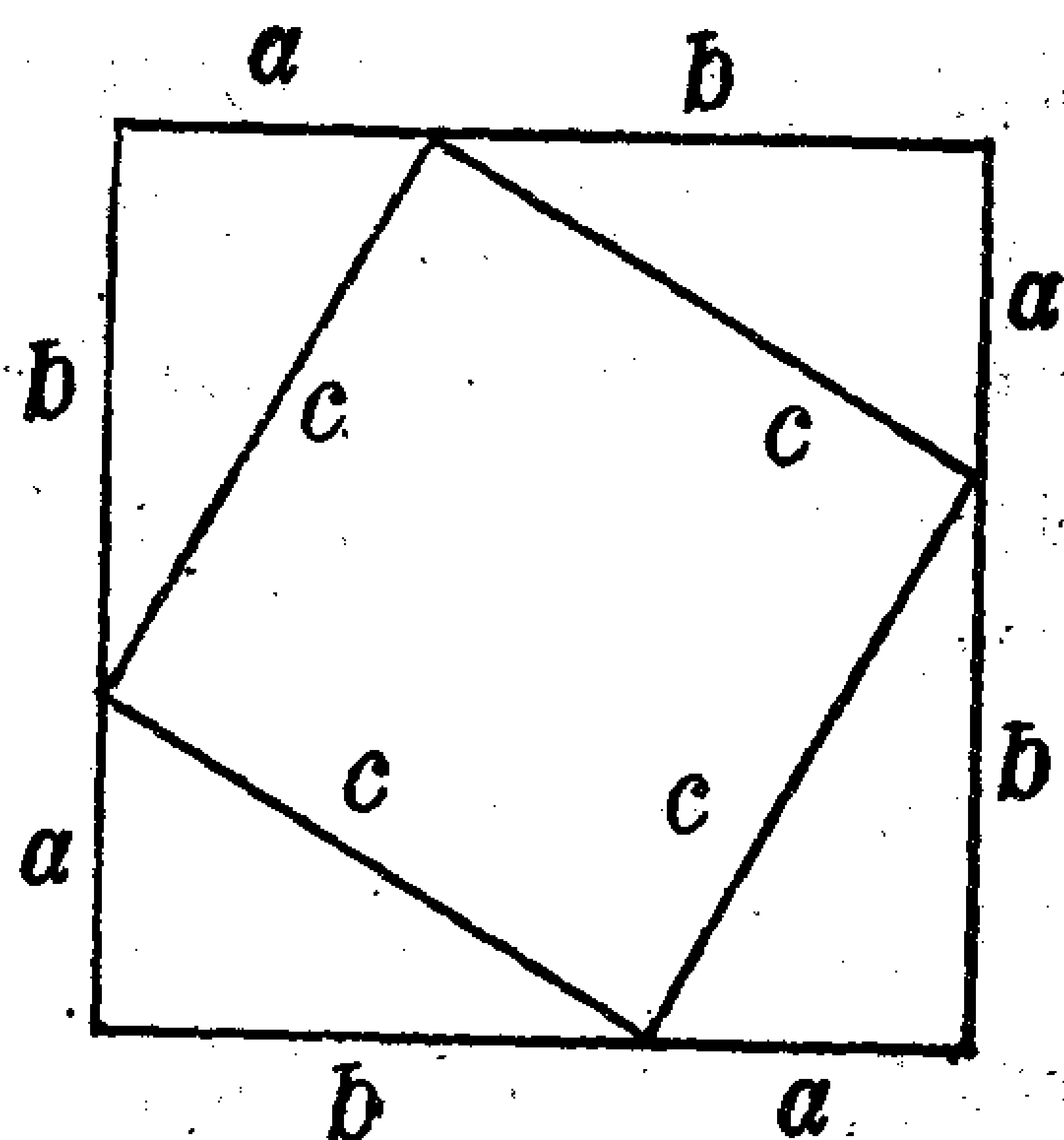


图 3

即是以弦为边的一个正方形以及与已知三角形全等的四个直角三角形. 于是，由等量减等量可见，以弦为边的正方形等于以勾、股为边的两个正方形之和.

为了证明第二种分解中当中的那一块的确是边长为c的正方形，我们要利用直角三角形诸角之和等

于两个直角这个事实．不过，这个事实就一般三角形而言已经被认为是毕达哥拉斯学派的功劳了．由于对这个一般事实的证明又需要知道平行线的某些性质，所以平行线理论也被认为是毕达哥拉斯学派早期的功绩．

整个数学史上也许找不出第二个定理有毕达哥拉斯定理那样多的千姿百态的证明．在E．S．卢米斯的著作《毕达哥拉斯命题》*第二版中，他搜集了这个著名定理的370个证明，并加以分类整理．

两个面积（或两个体积）P和Q叫做**按加法全等**，如果它们可以分解成若干对互相对应的全等图形．P和Q叫做**按减法全等**，如果它们可以拼接上若干对互相对应的全等图形，使得所得到的两个新图形是按加法全等的．毕达哥拉斯定理有很多证明，其依据就是证明直角三角形弦上的正方形是按加法或按减法全等于该直角三角形勾、股上的正方形的拼合．上面扼要介绍的那个证明，据传可能是毕达哥拉斯提出的，就是一种按减法全等的证明．

图4和图5对毕达哥拉斯定理提出了两个按加法全等的证明，第一个是H．贝利果于1873年给出的**，第二个是H．E．杜德内于1917年给出的．

---

* 密执安州A．阿博私人印刷；爱德华兄弟出版公司1940年出版．翻印本可向华盛顿“全国数学教师理事会”购买．——原注

** 这是重新发现的证明，所用的分解是T．柯拉（826—901）早已知道的．——原注

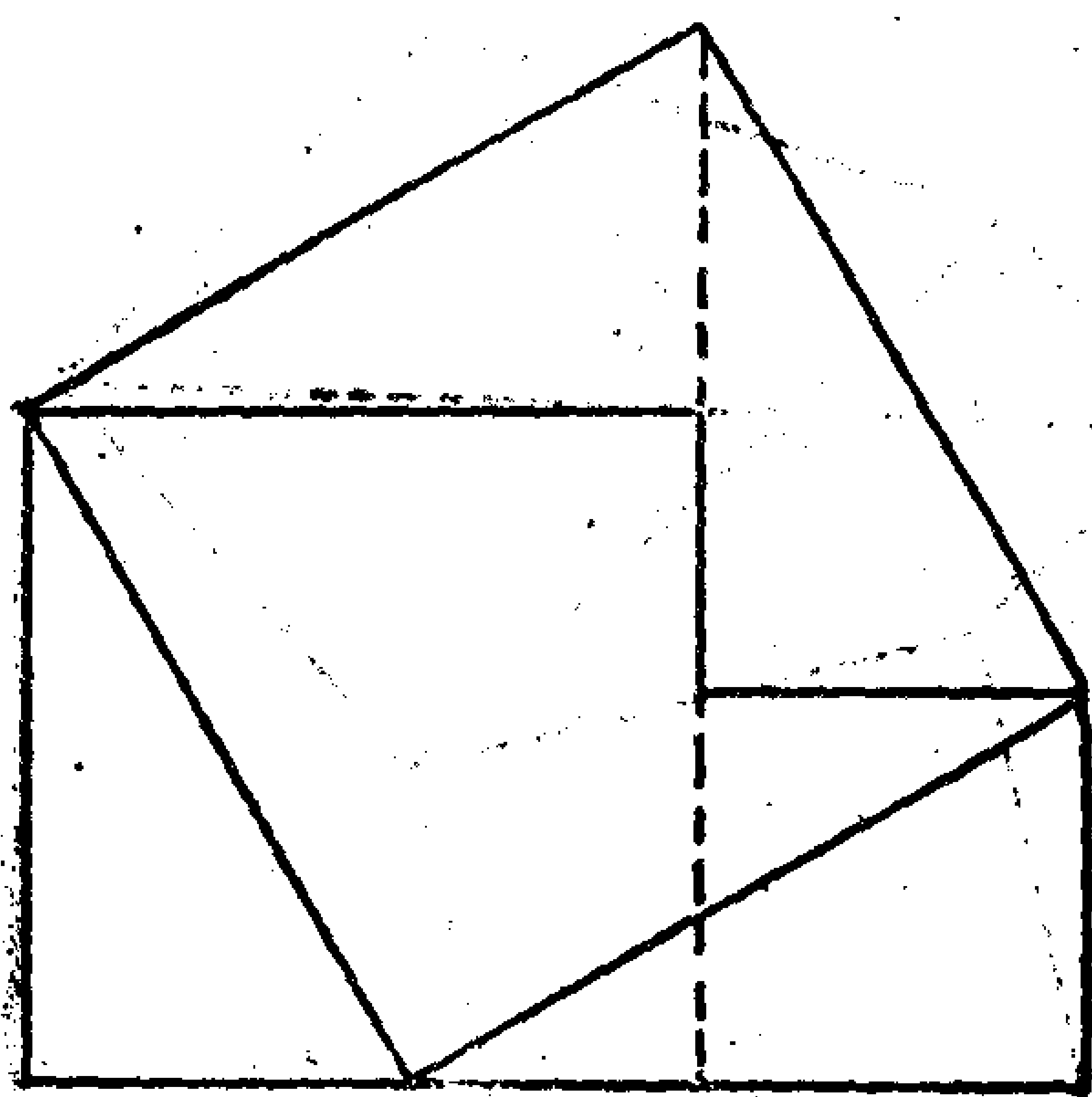


图 4

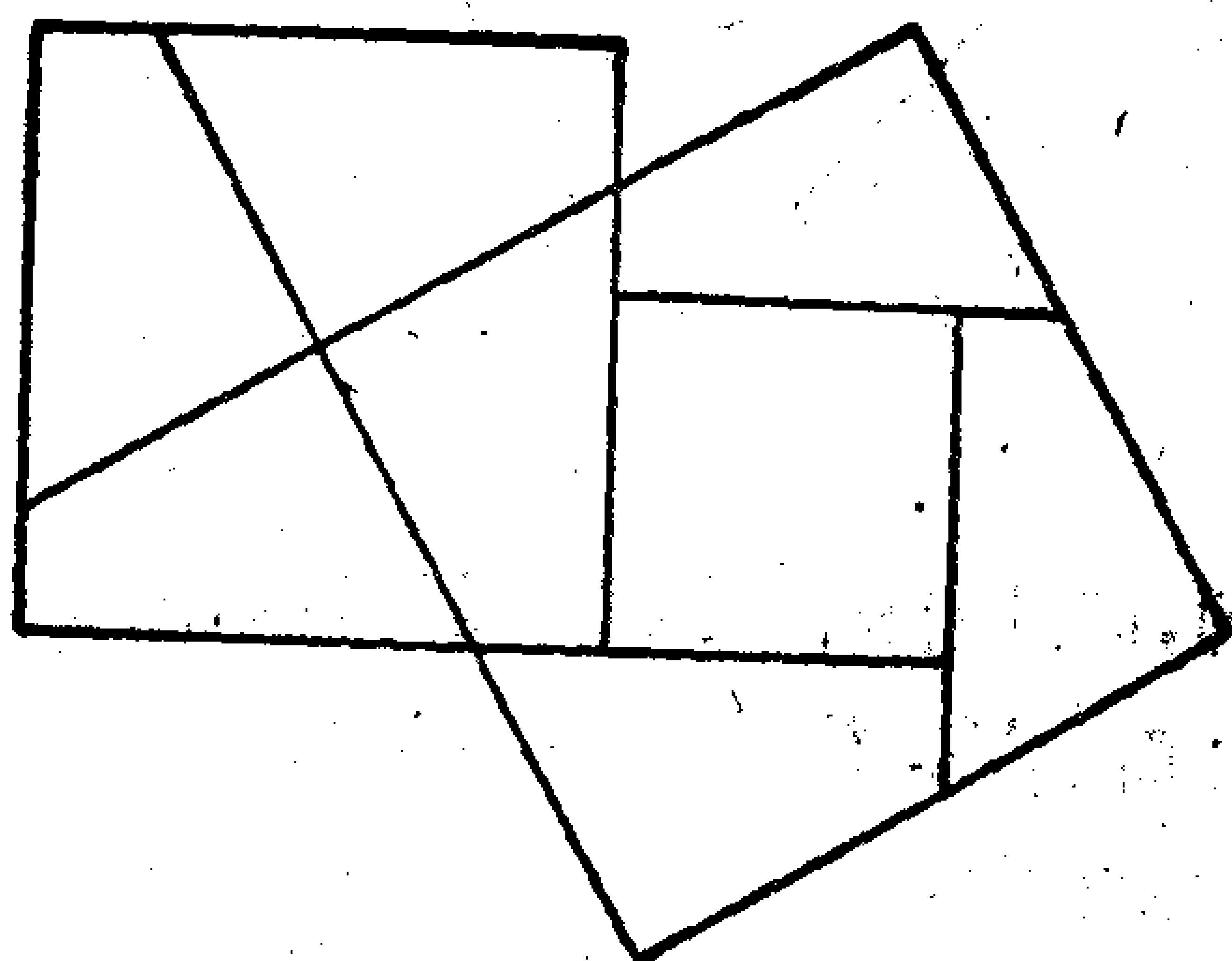


图 5

图 6 提出了一个按减法全等的证明，据说是达·芬奇(1452—1519)① 想出来的。

任何两个多边形的面积如果相等，就是按加法

① 意大利著名画家、雕刻家、建筑家、工程师、数学家，留有力学、几何光学及透视法的手稿。——译注

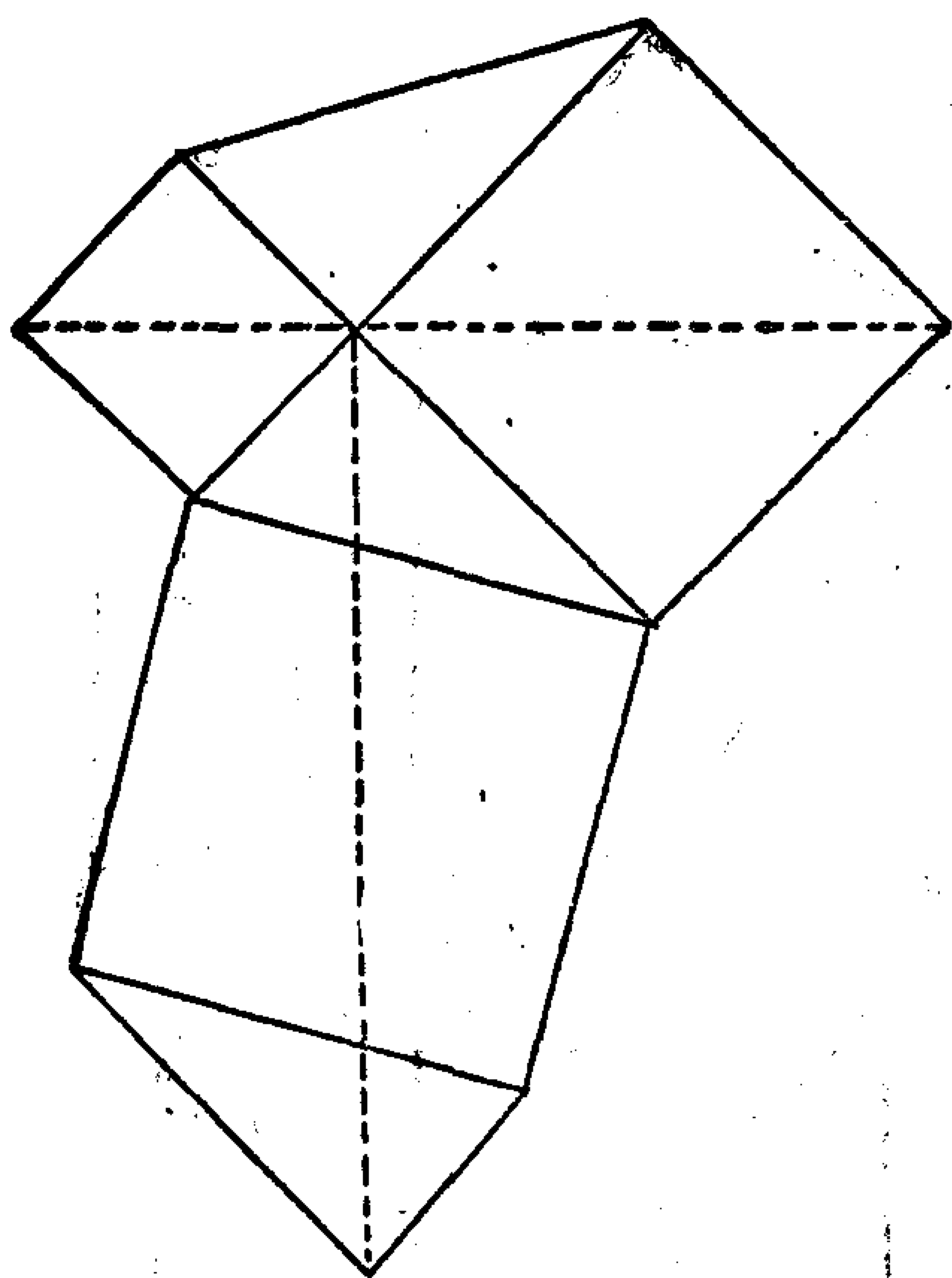


图 6

全等的，而且面积的分解总是可以用圆规直尺作图。另一方面，M. 德恩在1901年证明，两个多面体的体积即使相等，却不一定是按加法全等的，也不一定按减法全等的。特别是，不可能把一个正四面体分解成一些多面体图形，使得这些图形可以重新拼成一个立方体。欧几里德在其《几何原本》（约在公元前300年）中有时就使用分解方法来证明面积相等。

欧几里德在其《几何原本》卷 I 命题47中，基于图 7 对毕达哥拉斯定理给出了一个优美的证明；

图 7 有时叫做“圣方济会道袍”①，也叫做“新娘的花轿”。证明大意如下：$(AC)^2=2\triangle JAB=2\triangle CAD=ADKL$；同样，$(BC)^2=BEKL$。因此，$(AC)^2+(BC)^2=ADKL+BEKL=(AB)^2$。

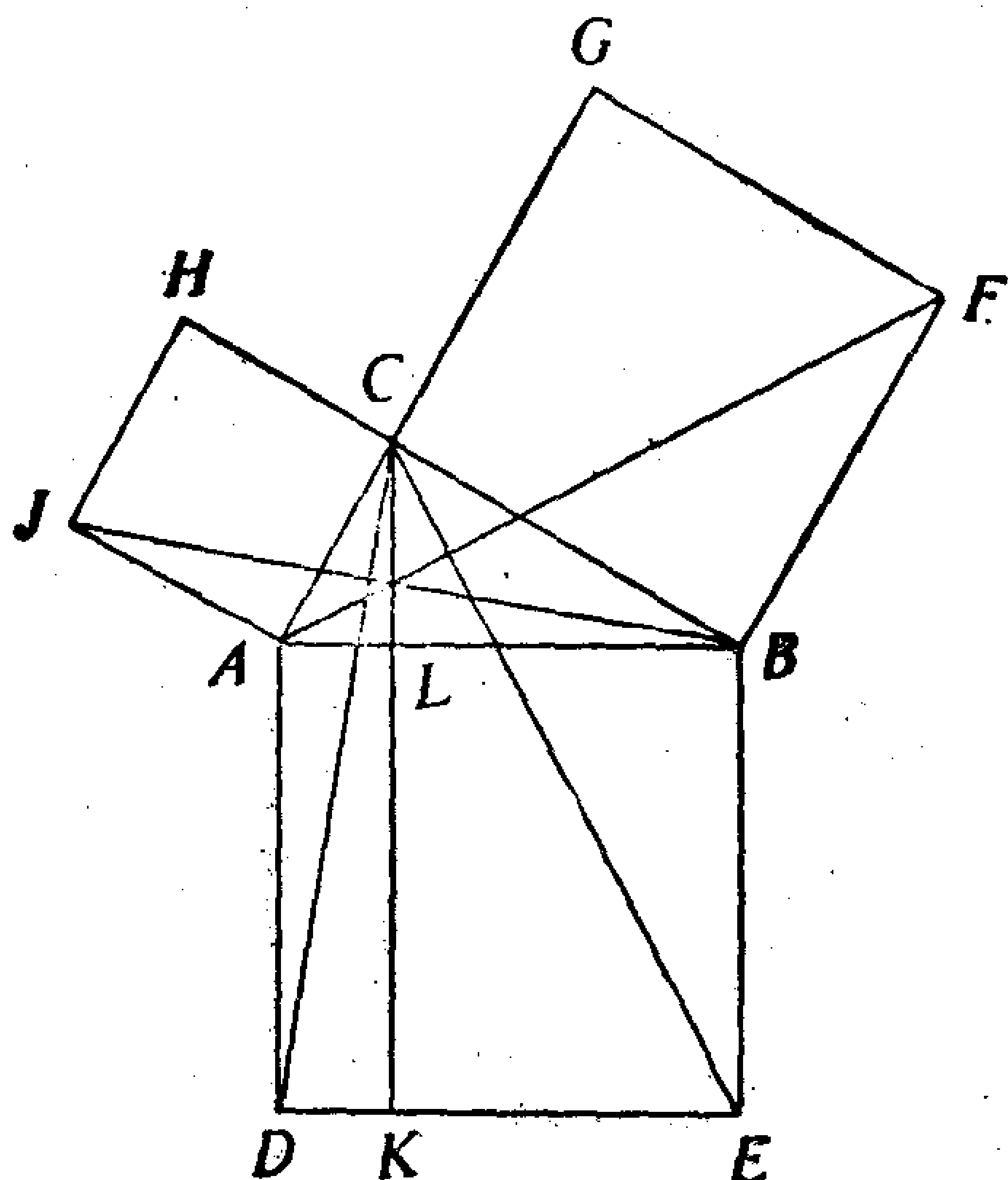
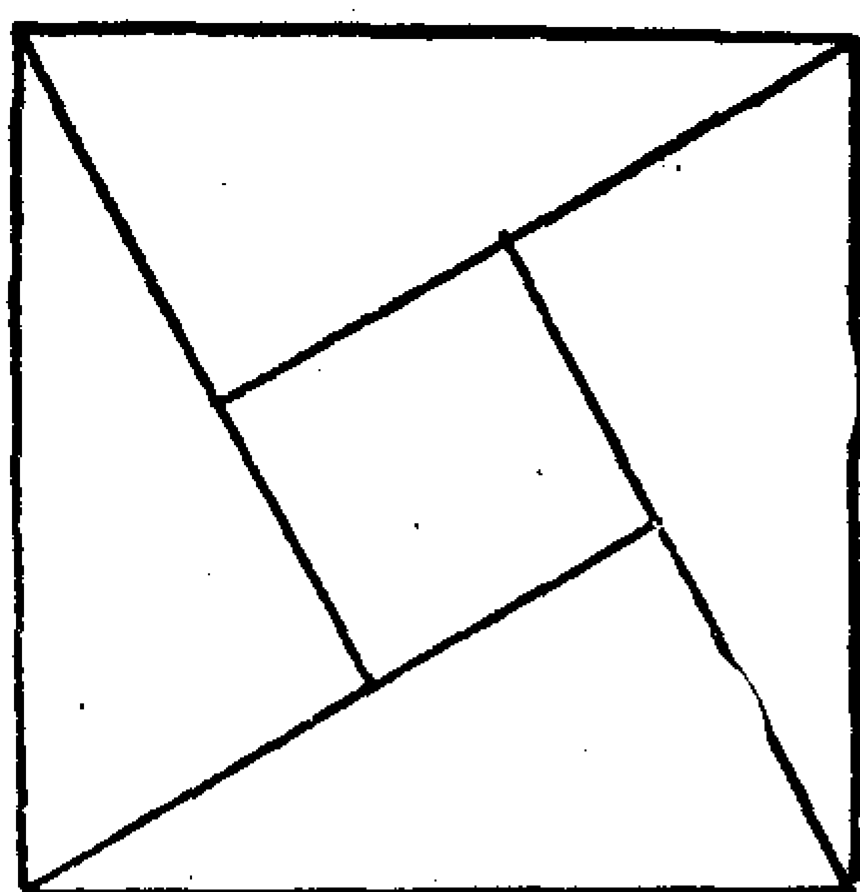


图 7

中学教师有时也向学生讲毕达哥拉斯定理的一个奇怪的证明，那是印度数学家兼天文学家巴斯卡拉给出的，他的学术活动在1150年左右达到高峰。证明是分解式的：如图 8 所示，弦上的正方形分成四个三角形，都和已知直角三角形全等，还有一个

① 圣方济会是天主教的一个教会组织，由圣方济建立。——译注



正方形，边长等于已知直角三角形勾、股之差。这些图形很容易重新拼成勾、股上的两个正方形之和。巴斯卡拉画出了图，没有多加解释，只写了一个字："瞧！"当然啰，添一点代数运

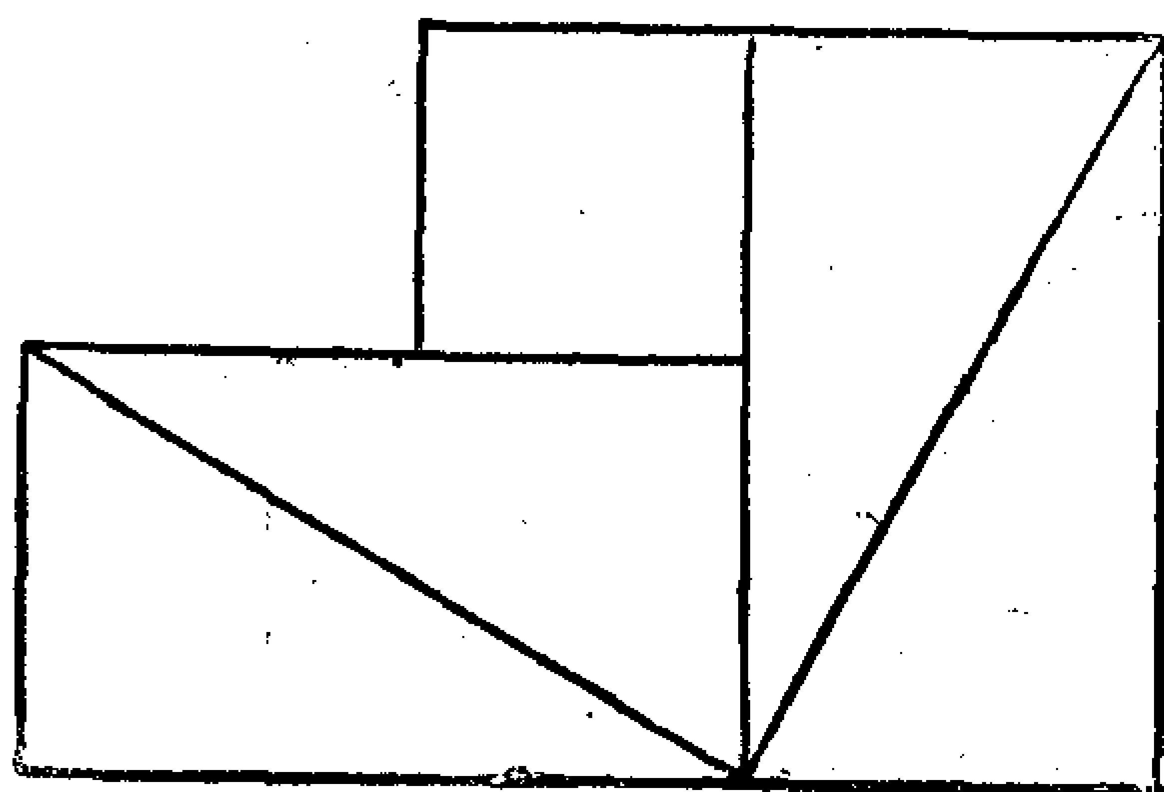


图 8

算就把证明补全了，因为，如果a，b，c是已知直角三角形的勾、股、弦，则有

$$c^2=4(ab/2)+(b-a)^2=a^2+b^2.$$

也许，电影放映出来的活动证明才是更加好"瞧"的证明，这时，经过图 9 所示各阶段，弦上的正方形连续变形，最后成为勾、股上两个正方形之和。

巴斯卡拉又画一条高线垂直于弦，提出了毕达哥拉斯定理的第二个证明。由图10的相似直角三角

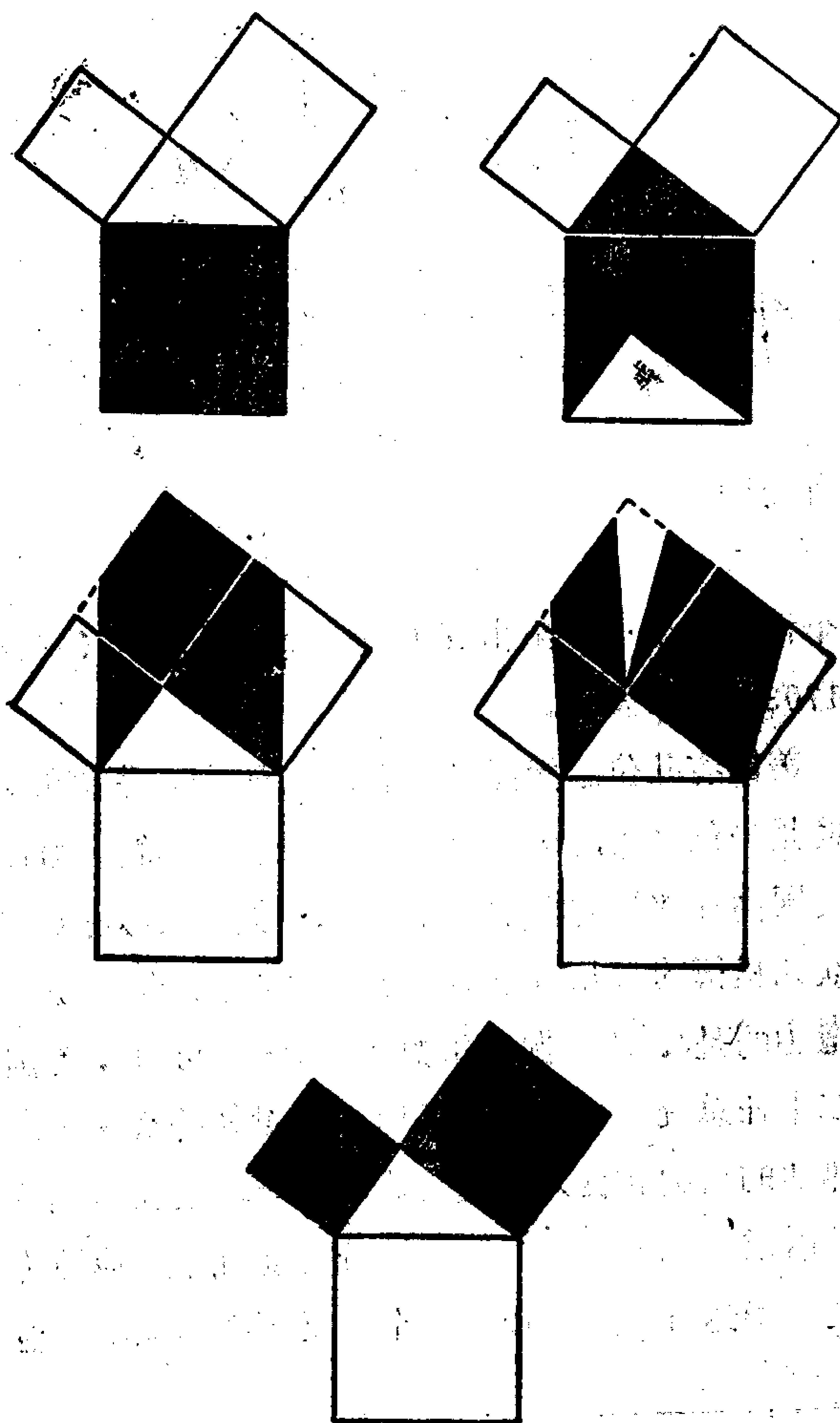


图 9

形可见$c/b=b/m$，$c/a=a/n$，即是

$$cm=b^2，\quad cn=a^2.$$

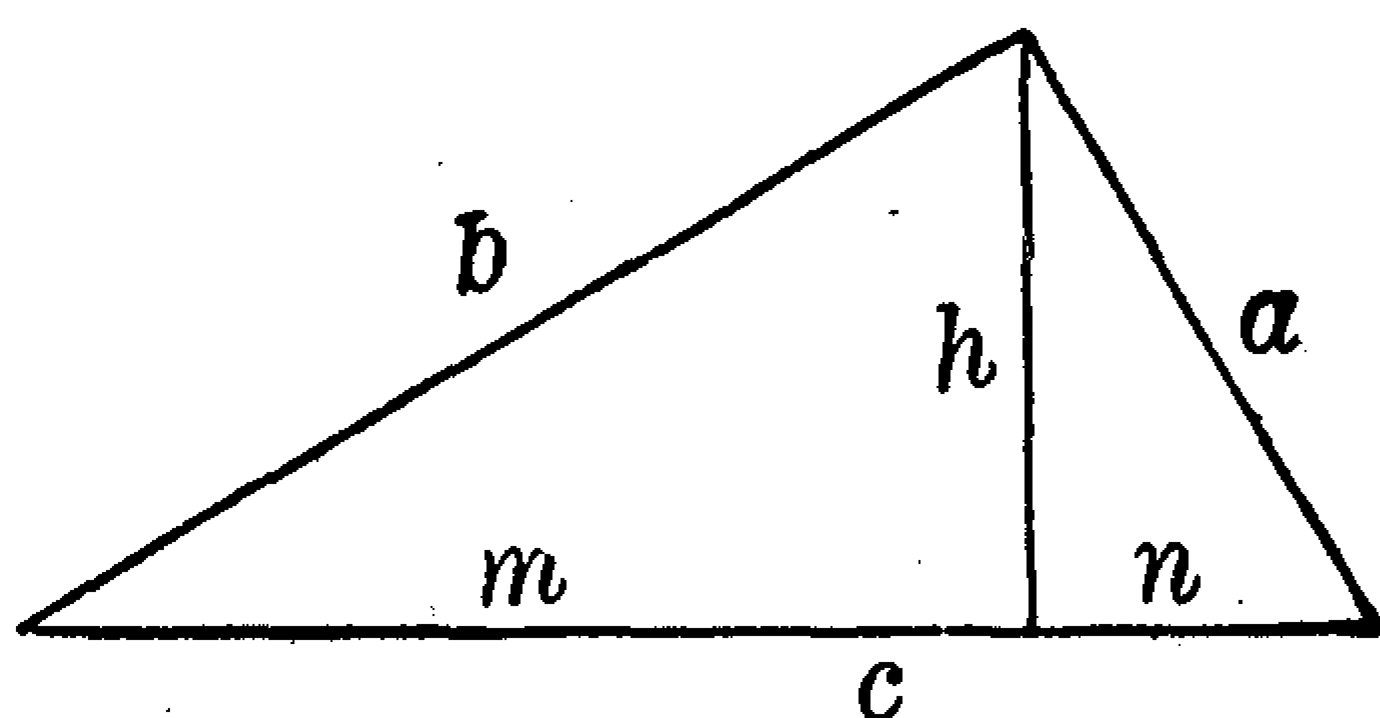


图10

相加得到

$$a^2+b^2=c(m+n)=c^2$$

这个证明在十七世纪由英国数学家J.瓦里斯（1616—1703）重新发现。

美国有几位总统同数学有点瓜葛。G.华盛顿①曾经是一位著名的勘测员，T．杰斐逊② 曾大力促进美国高等数学的教学工作，A．林肯③ 据说研究了欧几里德的《几何原本》之后学会了逻辑．更有创造力的是J．A．伽菲尔德（1831—1881），美国第二十任总统，他当学生的时候就对初等数学表现出热切的兴趣和良好的能力．1876年，他在当众议员的时候，也就是他当美国总统的前五年，他独力发现了毕达哥拉斯定理的一个非常漂亮的证明，他

① 美国第一任总统，1732—1799．——译注
② 美国第三任总统，1743—1826．——译注
③ 美国第十六任总统，1809—1865，以解放黑奴著称．——译注

是在和一些国会议员讨论数学时灵机一动想出来的。这个证明后来在《新英格兰教育杂志》上登出来了。中学生看到这个证明总是很感兴趣。只要学了梯形面积的公式以后马上就可以讲，主要是用两种不同的方法来计算图11中梯形的面积：先用梯形面积的公式（面积为上下底之和之半乘以高），然后再把梯形面积表为它分成的三个直角三角形面积之和。这样求得的梯形面积的两个表达式相等，所以有（见图11）

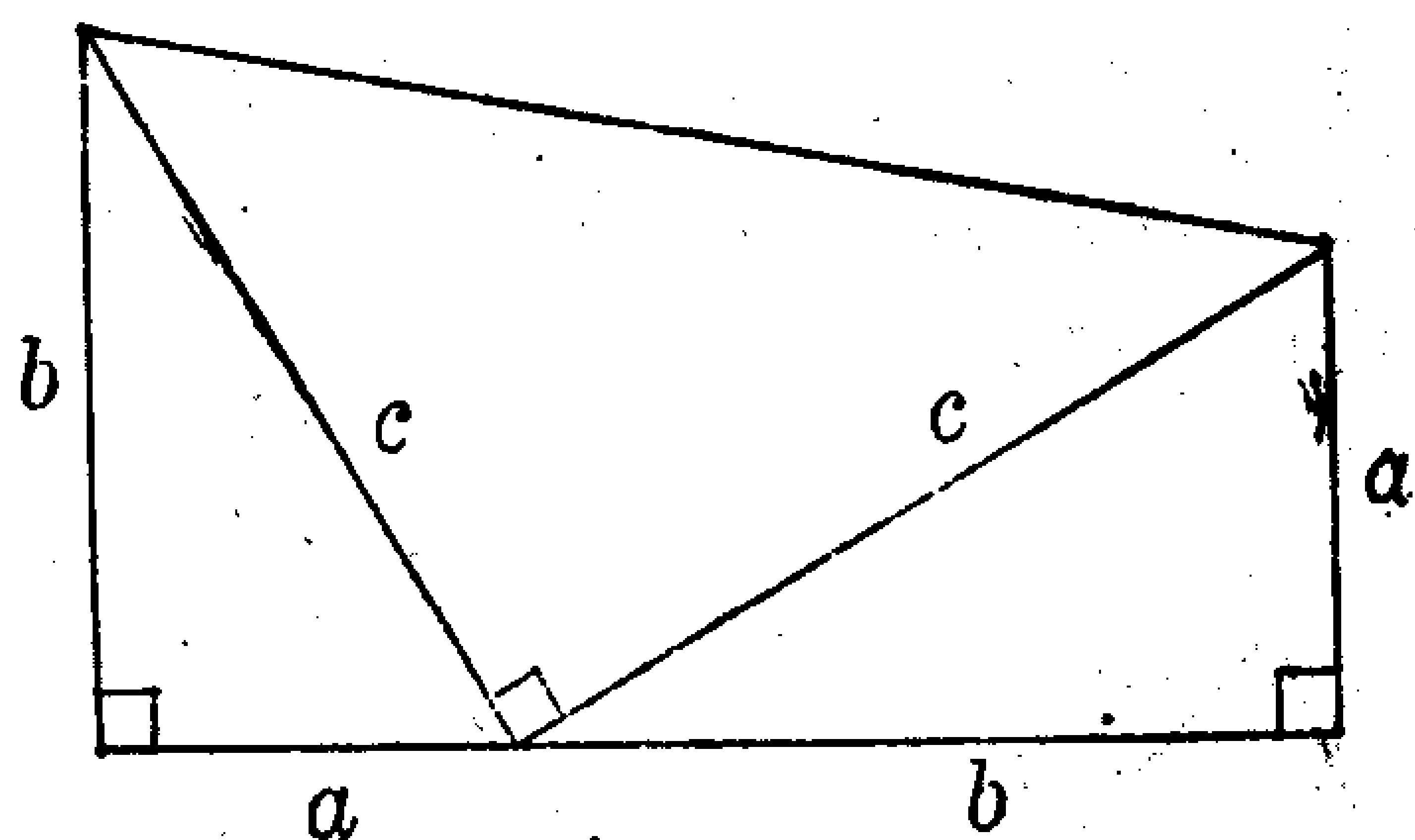


图11

$$(a+b)(a+b)/2=2[(ab)/2]+c^2/2,$$

即是

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2,$$

从而

$$a^2+b^2=c^2.$$

由于勾、股、弦为a, b, c的任何直角三角形总是相应地有所画的那样一个梯形，所以就证明了毕达哥

拉斯定理。

毕达哥拉斯定理也象许多别的著名定理一样有很多推广，甚至在欧几里德的时代这个定理就已经有一些推广了，例如，《几何原本》卷Ⅵ命题31说：**在直角三角形中，在弦上画出一个图形的面积等于在勾、股上用同样方法画出的两个相似图形面积之和。**这个推广只是把直角三角形三边上的三个正方形换成了任何三个作法相同的相似图形。由《几何原本》卷Ⅱ命题12和13可以得到一个更有价值的推广。这两个命题合并起来有一个稍许现代化的提法：**在一个三角形中，钝角（锐角）对边的平方等于其余两边的平方和再加上（减去）其中一边与另一边在其上的投影之积的两倍.** 按照图12的记号，就是说

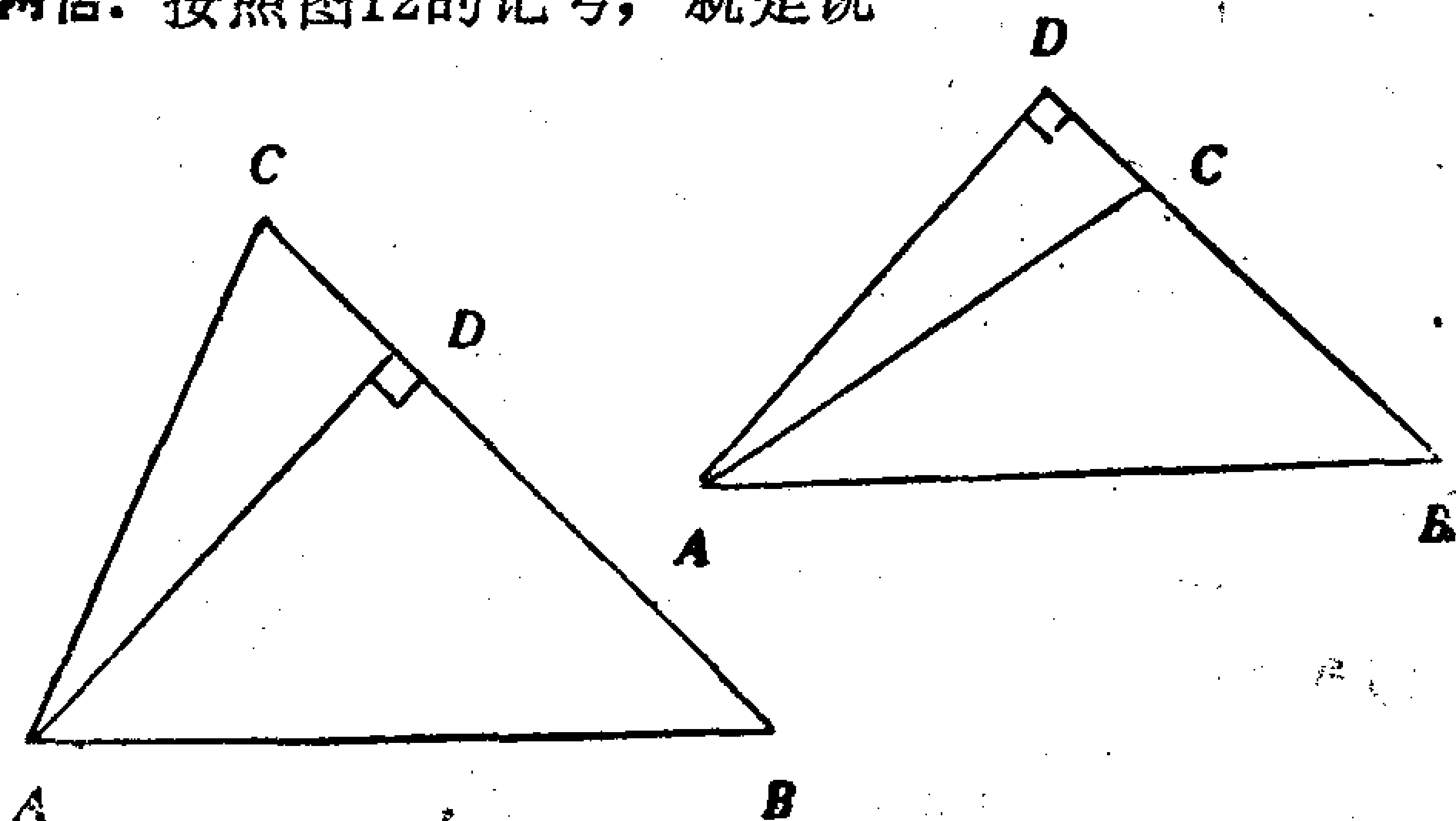


图12

$$(AB)^2=(BC)^2+(CA)^2\pm2(BC)(DC),$$

正负号视三角形ABC的角C是钝角或锐角而定。如果我们使用有向线段，就可以把《几何原本》卷Ⅱ的

命题12和13以及卷Ⅰ的命题47（毕达哥拉斯定理）合并成一个命题：在三角形ABC中，如果D是BC边上高线的垂足，则有

$$(AB)^2=(BC)^2+(CA)^2-2(BC)(DC).$$

由于$DC=CA\cos BCA$，所以我们看出，最后这个式子实际上就是所谓的**余弦定理**，的确是毕达哥拉斯定理极好的推广。

但是，毕达哥拉斯定理最引人注目的推广可能是亚历山大港①的巴布斯在其《数学荟萃》②卷Ⅳ开头提出的推广了（约在公元300年），巴布斯对毕达哥拉斯定理的推广如下（见图13）：**设ABC是任意三角形，$CADE$，$CBFG$是在边CA和CB上向外画出的任意平行四边形，DE和FG相交于H，作AL、BM跟HC′相等且平行，于是，平行四边形$ABML$的面积等于两个平行四边形$CADE$与$CBFG$面积之和.** 这点容易证明，因为我们有$CADE=CAUH=SLAR$，$CBFG=CBVH=SMBR$，所以$CADE+CBFG=SLAR+SMBR=ABML$。还应指出，毕达哥拉斯定理的这一推广有两个方面，一是毕达哥拉斯定理中的直角三角形换成了任

① 埃及北部海港城市，公元前332年亚历山大大帝所建.——译注.

② 公元三世纪希腊数学家巴布斯的重要著作，现存的是十二世纪的版本，其中收集了自欧几里德直到托勒玫的大部分数学成果，巴布斯为了便于理解还补充了若干引理和定理。因此，这是研究古希腊数学史的重要文献.——译注

意三角形，而直角三角形勾、股上的正方形则换为任意平行四边形。

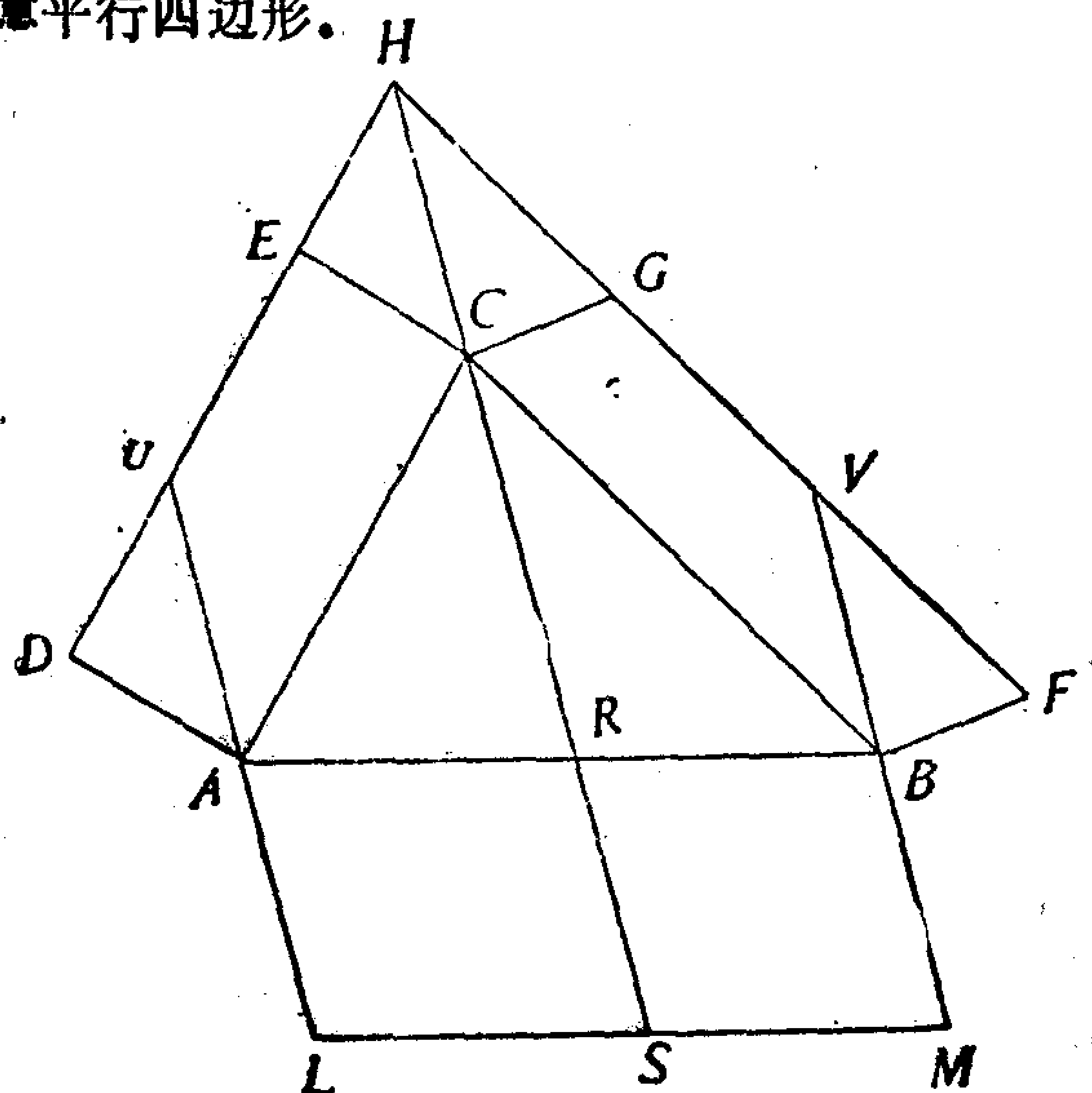


图13

学几何的中学生在见到巴布斯对毕达哥拉斯定理的推广时几乎没有不感兴趣的，所以这一推广的证明可以供学生作为很合适的练习，更有才能的几何学生也许愿意试手证明巴布斯所作的下述进一步的（三维空间）推广：设*ABCD*（见图14）是任何四面体，*ABD-EFG*，*BCD-HIJ*，*CAD-KLM* 是在 *ABCD* 的面*ABD*，*BCD*，*CAD* 上向外画出的三个任意三棱柱，*Q*是平面*EFG*，*HIJ*，*KLM* 的交点，*ABC-NOP* 是三棱柱，其三条棱*AN*，*BO*，*CP*都是向量*QD*的平移。于是，*ABC-NOP* 的体积等于 *ABD-EFG*，*BCD-HIJ*，*CAD-*

KLM的体积之和。证明类似于前面对巴布斯推广提出的证明。

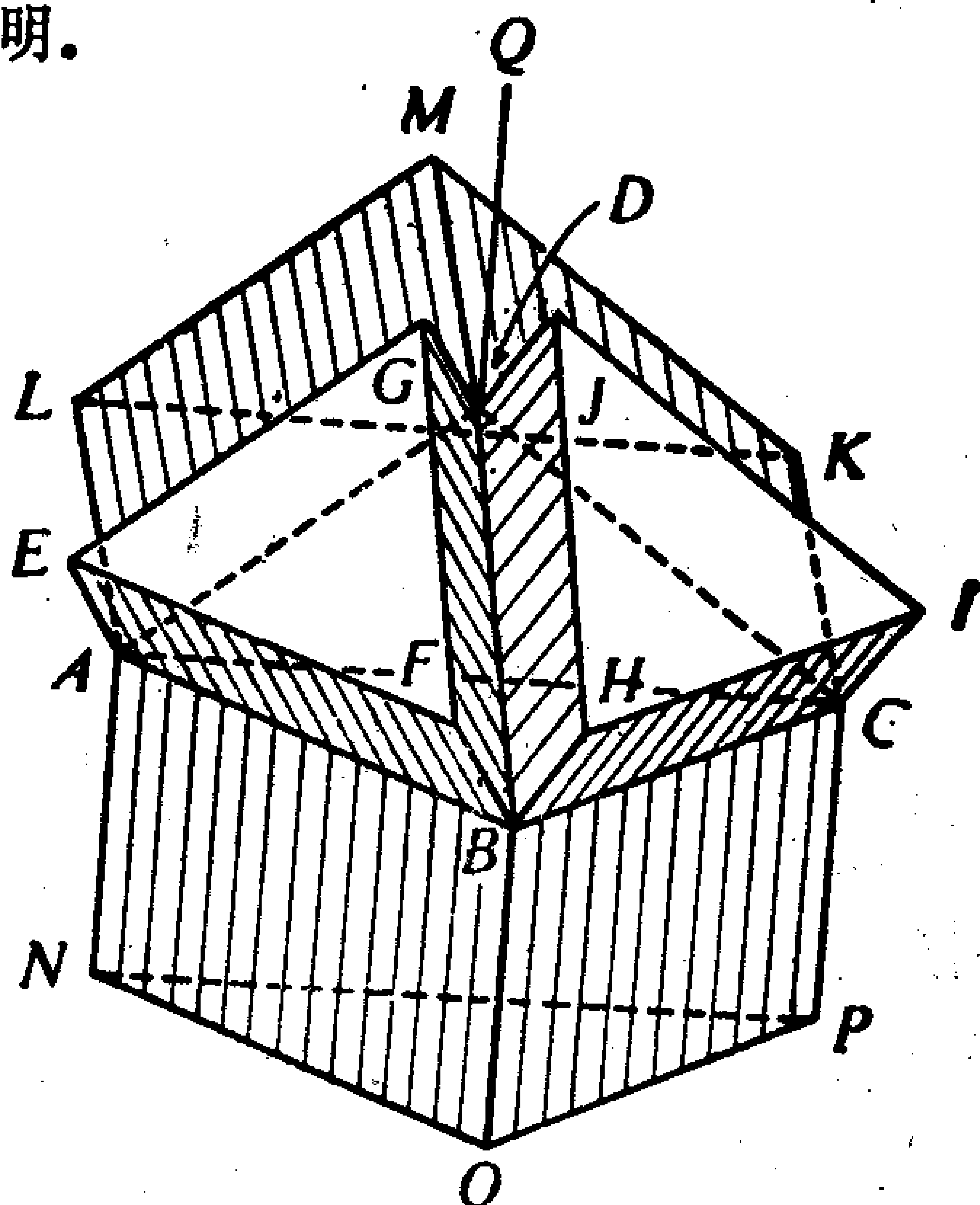


图14

最后，我们提出毕达哥拉斯定理在三维空间中一个类似的结果，不加证明。这个结果经常叫做德卦定理*。我们先提出一些定义。一个四面体如果有一个三面角，其三个面上的角全都是直角，则称为**三直角四面体**，该三面角称为四面体的**直角**，其相对面称为四面体的**底**。于是，德卦定理可以陈述如

* 这是以马尔维斯的J. P. 德卦（1712—1785）命名的定理，他是1783年把该命题提交巴黎科学院的。可是，笛卡尔（1596—1650）及其同代人J. 佛拉贝尔（1580—1635）早已知道该定理了；此外，这也是J.索于1774年提交给巴黎科学院的一个更一般定理的特例. ——原注

下：**三直角四面体底面积的平方等于其余三面的面积平方之和**。读者如果跃跃欲试，不妨给以证明。

由于现在对星际探索的兴趣日益增长，而宇宙中其他星球上可能存在生命，所以不时有人建议，在地球上建造某种巨大的图案，借以向可能有的天外来客表明，我们这个星球上是存在智慧的。最可取的图案似乎是毕达哥拉斯定理的一种巨大的图示构形，可以建造在撒哈拉沙漠上，俄国的西伯利亚大草原上或别的广阔地区。任何有智慧的生物对于欧氏几何中这个杰出的定理必定是一目了然的，而且似乎很难想出一个更好的、形象化的图案来达到这个目的了。

1971年，尼加拉瓜发行了一组邮票，对世界"十大数学公式"表示敬仰。每张邮票印有一个特殊的公式，附上一幅适当的插图，邮票的背面印有用西班牙文写的有关这一公式重要性的简要说明；这套邮票中有一张就是纪念毕达哥拉斯公式$a^2+b^2=c^2$的。科学家和数学家见到这些公式如此受人景仰，一定是喜笑颜开的，因为这些公式对于人类发展的贡献肯定大大超过了邮票上经常出现的许多帝王将相的贡献。

练习

4·1 证明：两个平行四边形如果有公共的底边和相等的高线，就有相等的面积。方法是证明这两个平行四边形是按加法全等或按减法全等的。（这是欧几里德在其《几何原本》卷I命题35中使用的方法。）

4·2 证明：任何三角形都按加法全等于一个矩形，其长为三角形的最长边。

4·3 详细叙述那个据传可能是毕达哥拉斯提出的对毕达哥拉斯定理的分解式证明。

4·4 详细叙述毕达哥拉斯定理的下列分解式证明：(*a*) H. 贝利果的证明，(*b*) H.E. 杜德内的证明，(*c*) 达芬奇的证明。

4·5 (*a*) 据传，古埃及测地员为直角三角形放样的方法是把一根绳子打11个结，分为12等分，借以作出3-4-5的三角形。试说明可能的进行步骤。

(*b*) 由于没有任何文献证据来说明古埃及人知道哪怕是毕达哥拉斯定理的一个特例，所以就发生了下面这个纯学术性的问题：不用毕达哥拉斯定理，也不用它的逆定理或任何推论，证明3-4-5三角形是一个直角三角形。解决这个问题的工具是图15，载于《周髀算经》，这是已知最老的中国数学著作，其时期可以上溯至公元前第二个千年

期。①

4·6 试对毕达哥拉斯定理的巴布斯推广在三维空间中的那个类似提法给以证明。

4·7 从三直角四面体的直角顶点出发的三条棱叫做该四面体的**股**，从直角顶点到底面的垂线叫做该四面体的**高**。

(*a*) 证明：三直角四面体三股倒数平方之和等于该四面体高的倒数平方。

(*b*) 证明德卦定理。

4·8证明T。柯拉对毕达哥拉斯定理提出的下述推广：在任意三角形ABC中，BC边上的两点B'和C'使得$\angle AB'B=\angle AC'C=\angle A$，则有$(AB)^2+(AC)^2=BC(BB'+CC')$。

证明：当$\angle A$是直角时，这个定理化为毕达哥拉斯定理。

4·9 勾、股、弦为a，b，c的球面直角三角形，其毕达哥拉斯公式是什么？这里a，b，c是角度。

4·10 提出并证明毕达哥拉斯定理的逆定

---

① 宋代鲍澣之说：“《周髀算经》二卷，……，出于商周之间，自周公受之于商高，周人志之，谓之《周髀》。” 又，《周髀算经》中说：“勾广三，股脩四，经隅五。” “若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日。” 这就是现在所说的“商高定理”，比所谓的毕达哥拉斯定理至少早六百年。（以上引文转引自李俨著《中算史论丛》）——译注

理。（这是欧几里德《几何原本》卷Ⅰ的最后一个命题，即命题48。）

进一步的读物

Boltyanskt, *Equivalent and Equidecomposable Figures*, tr. by. A. K. Henn and C. E. Watts. Boston: D. C. Heath, 1963.

Heath, T. L., *History of Greek Mathematics*, 2 vols. New York: Oxford University Press, 1931.

Loomis, E. S., *The Pythagorean Proposition*, 2nd ed. Ann Arbor, Mich. :privately printed, Edwards Brothers, 1940.

五、第一次危机的爆发

无理量的发现

（約在公元前540年）

我们从小长大最先碰到的数是所谓**自然数**，即是**正整数**：1，2，3，……。这些数是有限多个事物的计数过程中升华而出的抽象概念。到后来，我们认识到，由于日常生活的需要，除了要对个别事物进行计数以外，还要量度各种各样的量，例如长度、重量与时间。为了满足这些简单的量度要求，就需要有**分数**，因为，比如说，一个长度很难得正好就是某个事先选定的线性单位的整数倍。对于其他的量度要求，例如把很低的温度记录下来，如果有**零**和**负整数**以及**负分数**，就觉得很方便，这就扩大了我们的数系。不过，如果我们把**有理数**定义为两个整数之商p/q，$q\neq 0$，那么这个有理数系，由于含有全部整数和分数，就我们实际上的任何量度需要而言，是完全够用了。

有理数有一种简单的几何表示法：在水平直线上标出两个特定的点，O和I（见图16），I在O的右

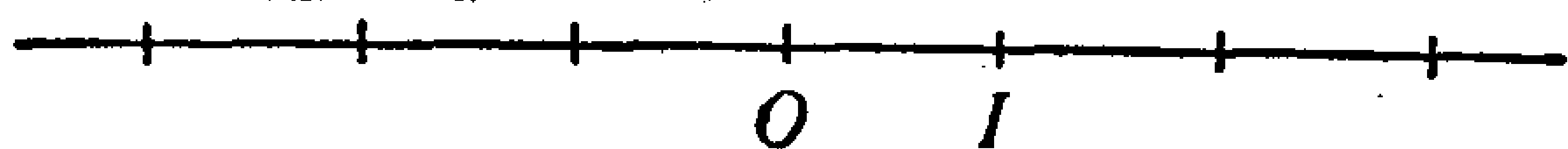


图16

边，把线段OI取作长度单位，设O和I分别代表数0和1，那么全体正负整数就可以表为直线上依次由单位区间隔开的那些点，正整数表为O右边的点，负整数表为O左边的点；而分母为q的分数就可以表为那些单位区间的q等分点。于是，相应于每个有理数，直线上有唯一的一个点。古代数学家，实际上还有今天对数直线的奥妙尚未入门的人，在他们看来，这样一来，数直线上所有的点全都用光了；按平常的情理，似乎也会产生这样的感觉。因此，当人们获悉数直线上确实还有一些点并不对应于任何有理数时，这想必是一个真正震憾人心的事件。这一发现肯定是古希腊最伟大的成就之一，似乎在公元前五世纪或六世纪什么时候在毕达哥拉斯哥老会的信徒中就已有传闻了。这是数学史上一个真正的"菁华"。

特别是，毕达哥拉斯学派发现，取数直线上的点P，使得距离OP等于单位正方形对角线之长（见图17），则该点不对应于任何有理数。后来，又发现了数直线上许多别的点也不对应于任何有理数。因此，必须创造出一些新的数，与这些点成对应；

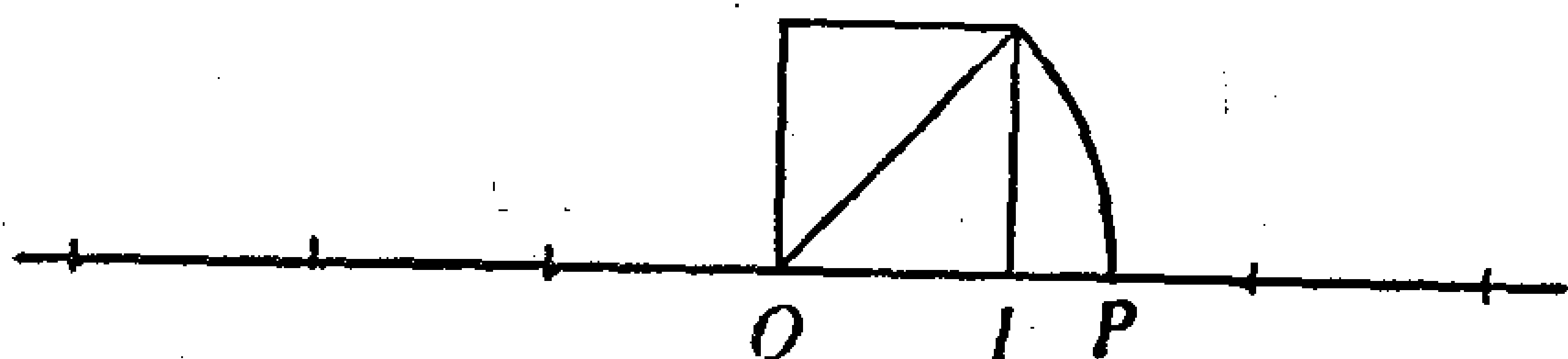


图17

由于这些数不可能是有理数（即是**比数**），所以就起名叫**无理数**。

据毕达哥拉斯定理，单位正方形对角线之长为$\sqrt{2}$，所以要证明上述点P不可能相应于有理数，只须证明$\sqrt{2}$是无理数。为此，我们先指出，如果s是一个正整数，则s^2为偶数的充要条件是：s是偶数。现在假设$\sqrt{2}$是有理数，即是$\sqrt{2}=p/q$，p和q是互素的整数*。于是

$$p=q\sqrt{2},$$

或

$$p^2=2q^2.$$

由于p^2是一个整数的两倍，即是偶数，所以p也必定是偶数。令$p=2r$，则上面最后那个等式变成

$$4r^2=2q^2,$$

或

$$2r^2=q^2.$$

由此可见，q^2是偶数，所以q也必定是偶数。但这

* 两个正整数如果没有大于1的正整数公因子，则称为互素的。例如，5和18互素，而12和18则不互素。——原注

是不可能的，因为p和q已经假定是互素的。因此，$\sqrt{2}$是有理数的假设导致一种不可能发生的情况，所以必须放弃。

$\sqrt{2}$的无理性的这一证明本质上是传统的证明，据说是亚里斯多德（公元前384-322）提出的。按照柏拉图(公元前427-347)的说法，在$\sqrt{2}$已经被证明是无理数以后，塞利尼城的塞尔多拉斯（约在公元前425年）证明了$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{11}$，$\sqrt{12}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{14}$，$\sqrt{15}$，$\sqrt{17}$也都是无理数。

无理数的发现推翻了古希腊人持有的另一个直观信念：给了任何两条线段，揆情度理，似乎一定有第三条线段，也许非常非常小，使得两条已知线段的每一条都可以用它的整数倍来量度。今天的人，如果还不知道事实并不尽如此，几乎也都会有同样的直观感觉。但是，试以正方形的一边s和一条对角线d作为两条已知线段，如果存在第三条线段t，使得s和d都是它的整数倍，就会有$s=qt$，$d=pt$，这里p和q都是正整数。但是$d=s\sqrt{2}$，所以$pt=qt\sqrt{2}$，即$p=q\sqrt{2}$或$\sqrt{2}=p/q$是一个有理数。因此，存在**不可公度的**线段，即没有公共量度单位的线段，这是和直观感觉相反的。

现在让我们对$\sqrt{2}$的无理性扼要地提出另一种几何上的证明，即是证明正方形的边和对角线是不

可公度的。假若不然，则存在线段AP（见图18），使得正方形$ABCD$的对角线AC和边AB都是AP的正整数倍，即AC和AB关于AP可公度。在AC上截取CB_1

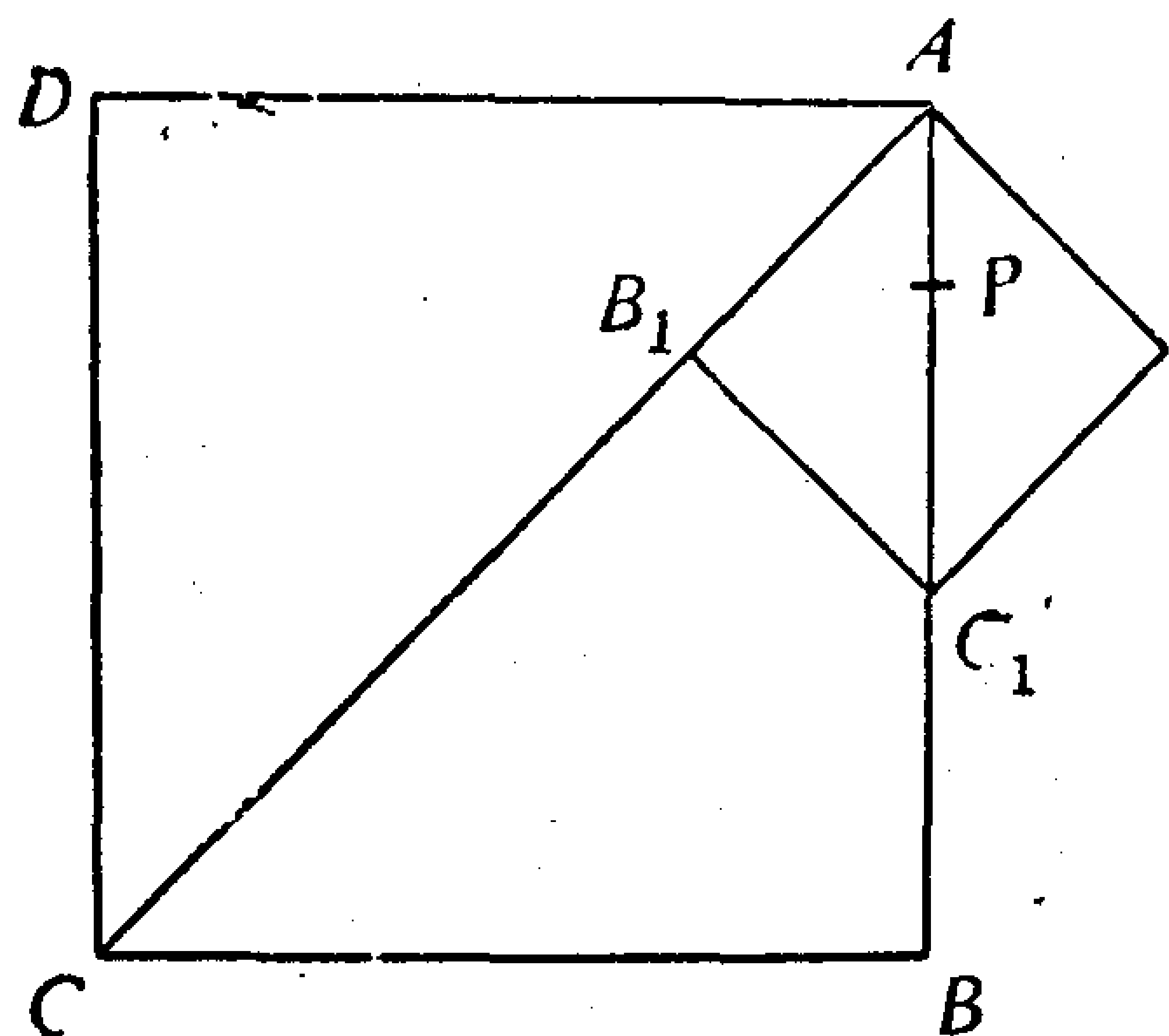


图18

$=AB$，作B_1C_1垂直于CA。容易证明$C_1B=C_1B_1=AB_1$。于是$AC_1=AB-AB_1$与AB_1关于AP可公度。但AC_1和AB_1是一个正方形的对角线和边，分别小于原正方形的对角线和边之半。可见只要把上述过程重复足够多次，最后就可以得到一个正方形，其对角线AC_n与边AB_n关于AP可公度，而$AC_n<AP$。这个矛盾就证明了所要的定理。

注意，$\sqrt{2}$的无理性的上述两个证明都使用了间接证法，即"归谬法"。杰出的英国数学家G.H.哈迪（1877-1947）曾经对这种证法提出了一个赏心悦目的说明。下象棋有所谓"舍子取势"的着

数，即是牺牲一卒或一个大子以换取优势。哈迪指出：归谬法“比象棋的任何一种舍子取势的着数高明得多：棋手可以舍掉一卒一子，而数学家舍掉的是整个一局。”* 归谬法是最最了不起的舍子取势的着数。

古代希腊几何学家试图作正五边形的时候，就同无理数不期而遇了。他们很容易地作出了正三边形、正四边形，即是等边三角形和正方形，作正六边形当然也不费事。但是作正五边形就完全是另一回事了。要保证成功，就必须造出一个36°的角，因为这个角的二倍72°是圆内接正五边形一条边张成的圆心角。在一个等腰三角形中，如果底角是顶角的二倍（见图19），则底角为72°，顶角为36°，所以问题归结为作出这样一个等腰三角形。在图19中，设AC把底角OAB二等分，则$OC = AC = AB$。三角形BAC相似于三角形AOB。取$OA = 1$，令$AB = x$，我们依次得到

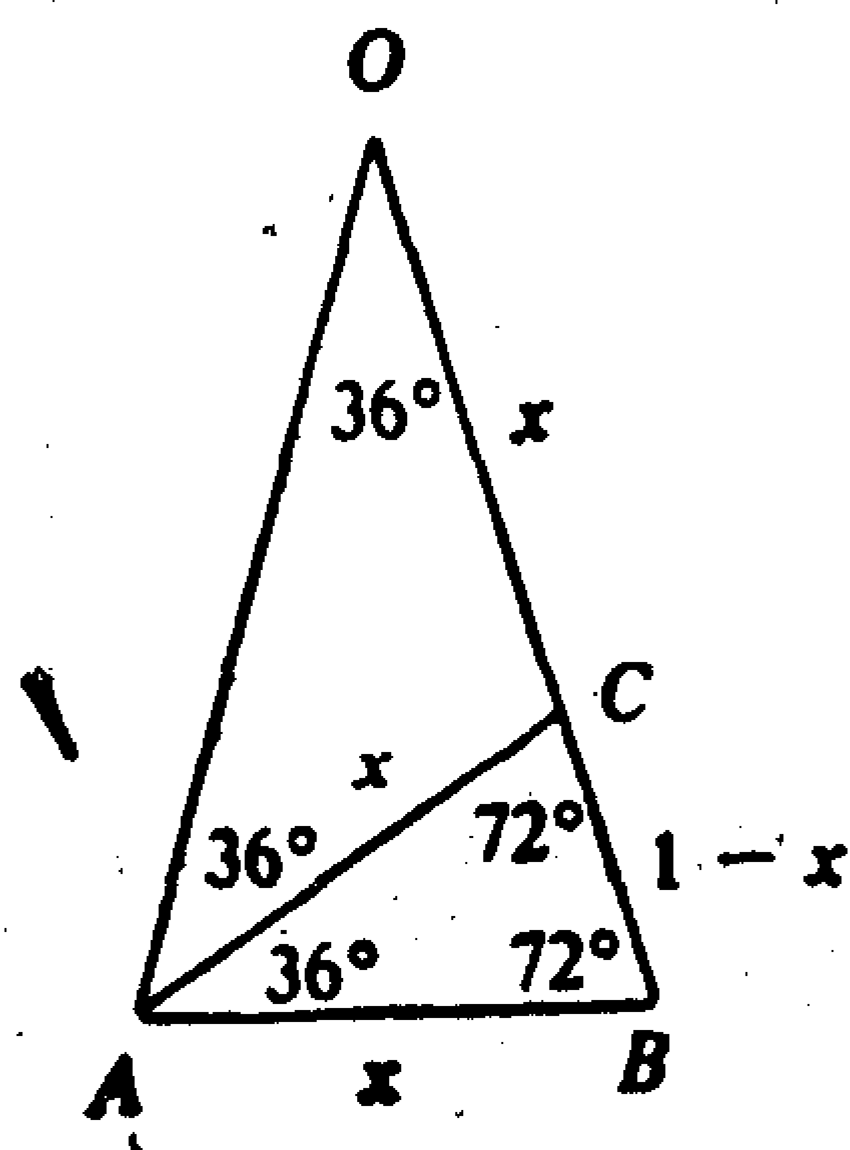


图19

* 见G. H. Hardy, A Mathematician's Apology, New York, Cambridge University Press, 1941, p.34.——原注

$$AB/BC=OA/AB,\quad x/(1-x)=1/x,$$

$$x^2+x-1=0.$$

可见$x=(\sqrt{5}-1)/2$.这个x的作图轻而易举，如图20所示，$OA=1$，$MO=1/2$，所以

$$AM=\sqrt{5}/2,$$

$$AB=AN=AM-MN=(\sqrt{5}-1)/2=x,$$

接下去就容易得到圆内接正五边形的作法了。

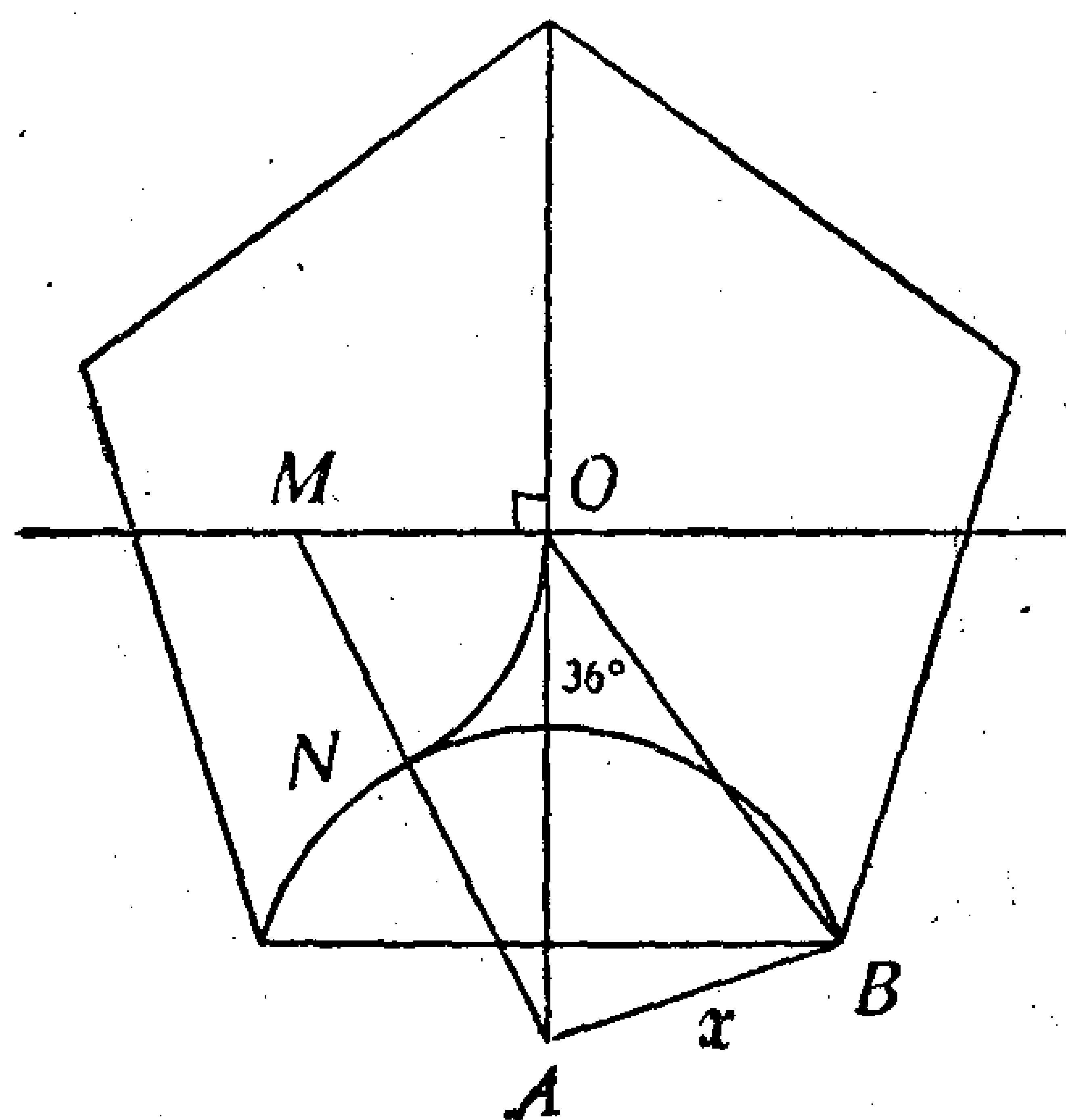


图20

如果点C是线段OB（例如图19中的OB）的分点，使得较长的线段OC是较短的线段CB和整个线段OB的比例中项，即

$$CB/OC=OC/OB,$$

在这种情况下，古希腊人就说，线段OB分成"黄金分割"．上面我们已经见到，如果x代表比值CB/OC，即OC/OB，则$x=(\sqrt{5}-1)/2$。所谓"黄

金比值”，就是指x这个数，有时候也指它的倒数

$$y=1/x=(\sqrt{5}+1)/2\approx 1.618.$$

这个比值在自然界以及其他地方似乎随处可见。

我们在后面的第十五讲中还要提到黄金比值。这里我们指出，心理学试验往往表明：使大多数人最赏心悦目的矩形是宽与长之比为黄金比值x的矩形。这种矩形叫做“黄金矩形”，是美术技法中的基本技法，即所谓“活性对称”，曾经得到J. 汉比基等人的深入研究。黄金比值和黄金矩形在希腊的建筑与制陶中沿袭至今，对雕塑、绘画、建筑设计、家具设计以及造型表演都有应用。许多美术家，例如著名的美国画家G. 贝洛斯，在他们的工作中都广泛使用了活性对称原理。

在发明了十进制小数以后，有理数与无理数之间的基本差别便了如指掌。容易证明，任何有理数的小数表示要么是有限的，要么是循环的，反之，任何有限小数或循环小数也都代表有理数。例如，$7/4=1.75$，$47/22=2.1\overline{36}$，这里63上面的小横线表示63这个小数段无限循环。因此，无理数的小数表示是无限非循环小数，反之，任何无限非循环小数也都代表无理数。

有理数和无理数的小数表示的区别，在证明这些数的某些性质时是非常有用的。例如，假如我们要证明任何两个不同的正无理数之间存在有理数，

就把这两个无理数记为a和b，$0<a<b$，设其小数表示为

$$a=a_0.a_1a_2\cdots,\quad b=b_0.b_1b_2\cdots.$$

设i是第一个使得$a_n\neq b_n$的n（$n=0,1,2,\cdots$），则

$$c=b_0.b_1b_2\cdots b_i$$

就是a和b之间的有理数。

一个实数叫做**简单正规数**，如果其十进位表示中所有十个数字出现的频率都相同；一个实数叫做**正规数**，如果同样长度的数字段出现的频率都相同。例如，π，e和$\sqrt{2}$据信都是正规数，但未证实。为了对上面这些数所猜想的正规性提出统计证据，它们的小数表示已经求到很大的位数了。

1967年，一些美国数学家利用一台计算机把$\sqrt{2}$的小数表示求到100 000位，1971年，哥伦比亚大学的J.杜特卡把$\sqrt{2}$求到一百万位以上：经过47.5小时的计算机时间，电子计算机把$\sqrt{2}$的小数表示算出到至少1 000 082精确位，填满了200页行距紧密的计算机输出印纸，每一页容纳了5000个数字。这是迄今算出来的一个无理数最长的近似值。

练习

5.1 (a)对讲演中扼要说明的$\sqrt{2}$的无理性补出详细的几何证明。

(*b*)画一个60°-30°的直角三角形；在斜边上自30°的顶点截取较长的直角边；自分割点作斜边的垂线，利用这个图形对$\sqrt{3}$的无理性提出一个几何证明。

5·2 (*a*)证明：过点(0，0)与(1，$\sqrt{2}$)的直线上除了(0,0)以外没有其他的坐标格子点①。

(*b*)说明如何用坐标纸来求$\sqrt{2}$的有理近似值。

5·3 若p是素数，n是大于1的整数，证明$\sqrt[n]{p}$是无理数。

5·4 (*a*)证明$\log_{10}2$是无理数。

(*b*)如果a和b是正整数，$a>1$，并且其中一个含有另一个没有的素因子，证明$\log_a b$是无理数。这是练习(*a*)的推广。

5·5 (*a*)证明：有理数与无理数之和为无理数。

(*b*)证明：有理数与无理数之积为无理数。

5·6 (*a*)毕达哥拉斯哥老会的徽记是**正五角星**，即正五边形五条对角线构成的五角星。证明：正五角星的每一条边各把与之相交的两条边分成黄金分割。

(*b*)设点G把线段AB分成黄金分割，AG是较

① 两个坐标均为整数的点. ——译注

长的线段；在AB上截取$AH=GB$。证明：H把AG分成黄金分割。

(c)证明：如果在一个黄金矩形的一端切掉一个正方形，则其余部分仍然是黄金矩形。

(d)证明：5/8是黄金比值$x=(\sqrt{5}-1)/2$的偏大近似值，其误差小于3％。

(e)若x是黄金比值$(\sqrt{5}-1)/2$，证明

$$x=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\cdots$$

5·7 (a)已知正五边形的边长，用圆规直尺作此正五边形。

(b)已知正五边形对角线之长，用圆规直尺作此正五边形。

(c)用圆规直尺作正15边形。

(d)假设：r和s是互素的正整数，并且可以用圆规直尺作正r边形和正s边形。证明：可以用圆规直尺作正rs边形。

(e)证明欧几里德《几何原本》卷XIII命题10：同一个圆的内接正五边形的一边、正六边形的一边以及正十边形的一边是一个直角三角形的三边。

5·8 (a)证明：有理数的小数表示要么是有限小数，要么是循环小数。

(b)证明：有限小数和循环小数都代表有理数。

(c) 试求小数表示为$3.\overline{239}$的有理数。

5·9 (a) 证明：0.101001000100001……是无理数，这里相继两个1之间的0每次增加一个。

(b) 证明：0.12345678910111213……是无理数，这是由相继的正整数组成的十进位小数。

5·10 (a) 证明：任何两个不同的有理数之间都有无穷多个有理数。

(b) 证明：任何两个不同的有理数之间都有无穷多个无理数。

(c) 证明：任何两个不同的无理数之间都有无穷多个有理数。

(d) 证明：任何两个不同的无理数之间都有无穷多个无理数。

进一步的读物

Hambidge, Jay, The *Elements of Dynamic Symmetry*, New York: Dover publications, 1967.

Heath, T.L., *History of Greek Mathematics*, 2 vols. New York: Oxford University Press, 1931.

Huntley, H.E., *The Divine Proportion, a Study in Mathematcal Beauty*, New York: Dover Publications, 1970.

六、第一次危机的消散

尤多克萨斯的比例理论

（约在公元前370年）

无理数及不可公度量的发现使毕达哥拉斯学派深感惊愕。首先，这对毕达哥拉斯的一切全靠正整数的哲学似乎是致命的一击，因为，不管怎么说，象$\sqrt{2}$这样的无理数，如果说不能写成两个正整数之比，那怎么能说它靠正整数呢？其次，这似乎也不合常情，因为当时有一种很强的直观感觉，就是任何一个量都可以表为某个有理数。几何上的相应情况也是令人惊讶的，因为存在一些线段，没有公共的量度单位，这又是与直觉抵触的。可是，毕达哥拉斯的比例及相似形的整个理论，却是基于一种貌似显然的前提上：任何两个线段都可公度，即一定存在某个公共的量度单位。毕达哥拉斯学派本来认为确凿无疑的大量几何命题，由于证明失效而突然面临报废的危险；数学基础爆发了一场严重的危机。这个“逻辑丑闻”非同小可，据传有一段时间曾经努力保守秘密；有一个传说讲，毕达哥拉斯的门人、

美塔庞通的赫巴萨斯由于把秘密泄诸外界、渎犯会规而在海上暴亡，据另一说法，毕达哥拉斯的哥老会把他驱逐出会，视为亡人，为他竖立了一块墓碑。

现在让我们举个例子来说明早期的毕达哥拉斯学派认为他们证明了有关三角形面积的一个基本命题的情况。

定理．两个同高三角形面积之比等于其底之比．

毕达哥拉斯学派早期的证明．如图21所示，

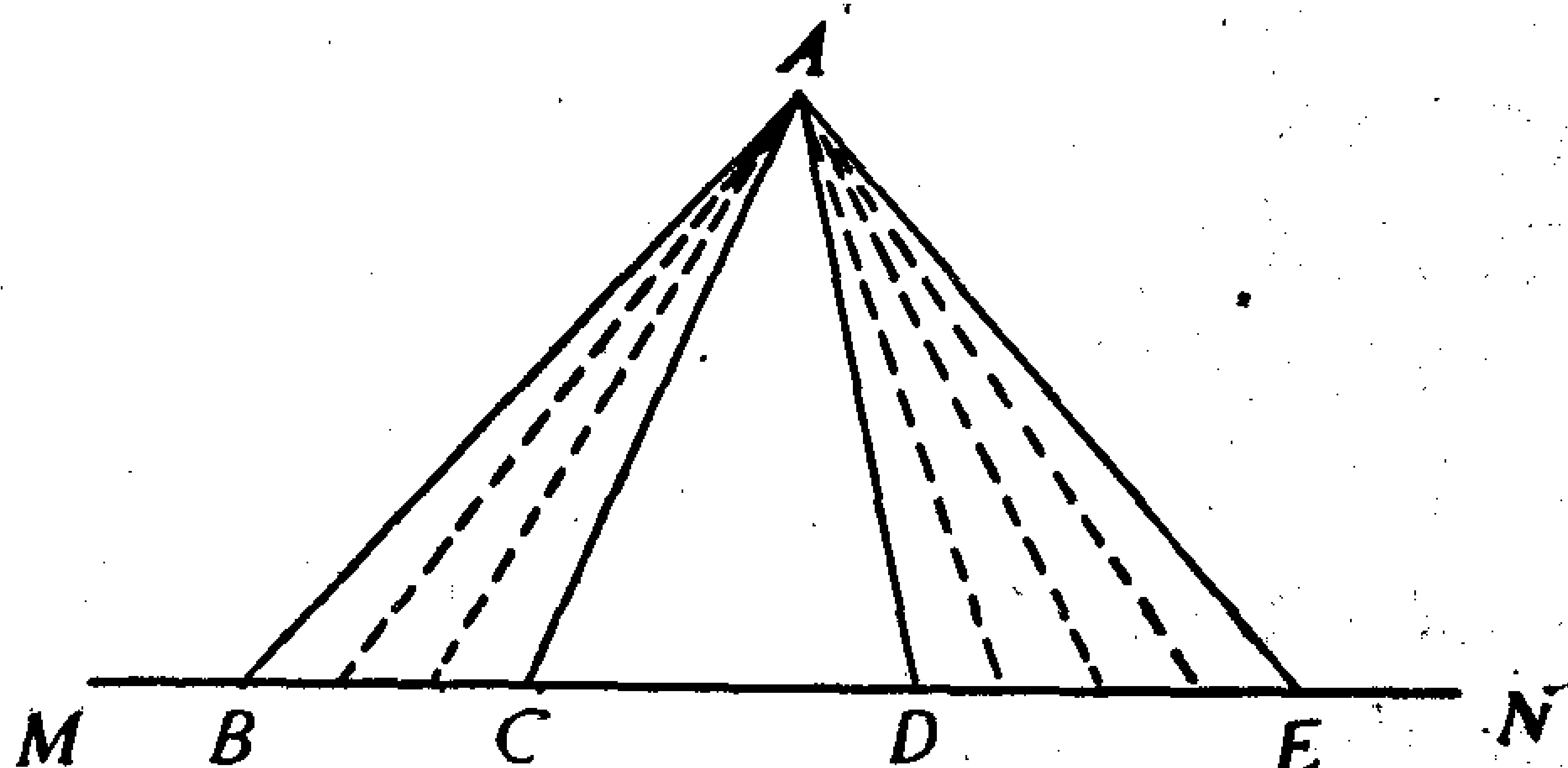


图21

设有三角形ABC和ADE，其底边BC和DE在同一条直线MN上。我们希望证明

$$\triangle ABC : \triangle ADE = BC : DE.$$

（据毕达哥拉斯学派早期的信念，任何两条线段均可公度）设BC和DE有某个公共的量度单位，比如说，BC有p单位，DE有q单位．在BC和DE上标出这些分点，把它们与顶点A联结起来．于是三角形

ABC与ADE各被分成p个小三角形和q个小三角形，全都有公共的高和相等的底，因而按照早已证明的一个结果，这些小三角形也都有相同的面积，可见

$$\triangle ABC:\triangle ADE=p:q=BC:DE,$$

命题证毕。

由于后来发现两个线段不一定可公度，所以这个证明，还有许多其他的证明，也就不能成立了，从而发生了那个叫人心烦意乱的“逻辑丑闻”。

这个“逻辑丑闻”是数学基础的第一次著名危机，这场危机既不曾轻易消散，也不曾迅速熄灭。最后，大约在公元前370年左右，柏拉图和天才的毕达哥拉斯门人阿奇塔斯的学生、才华横溢的希腊数学家尤多克萨斯巧妙地使这一“丑闻”烟消云散，他提出了比例，即两个比相等的定义，完全不依赖于有关的量是否可公度。这个定义是数学史上的“菁华”，叙述如下：

若干个量称为有相同的比，第一个比第二个等于第三个比第四个，如果满足下列条件：随便取第一个与第三个的任何等倍数，再随便取第二个和第四个的任何等倍数，则诸前项的等倍数同时一致地大于、等于或小于诸后项的等倍数。

这个冗长的定义读起来比较复杂，其实不过是说：若A,B,C,D是任何四个未予指名的量，A和B属于同一类（都是线段，或都是角度，或都是面

积，或都是体积），C和D属于同一类，于是，A比B等于C比D，如果对任何正整数m和n，

$$mA \gtreqless nB \text{的充要条件是} mC \gtreqless nD.$$

现在让我们应用尤多克萨斯的比例定义来重新证明前面讨论的命题。

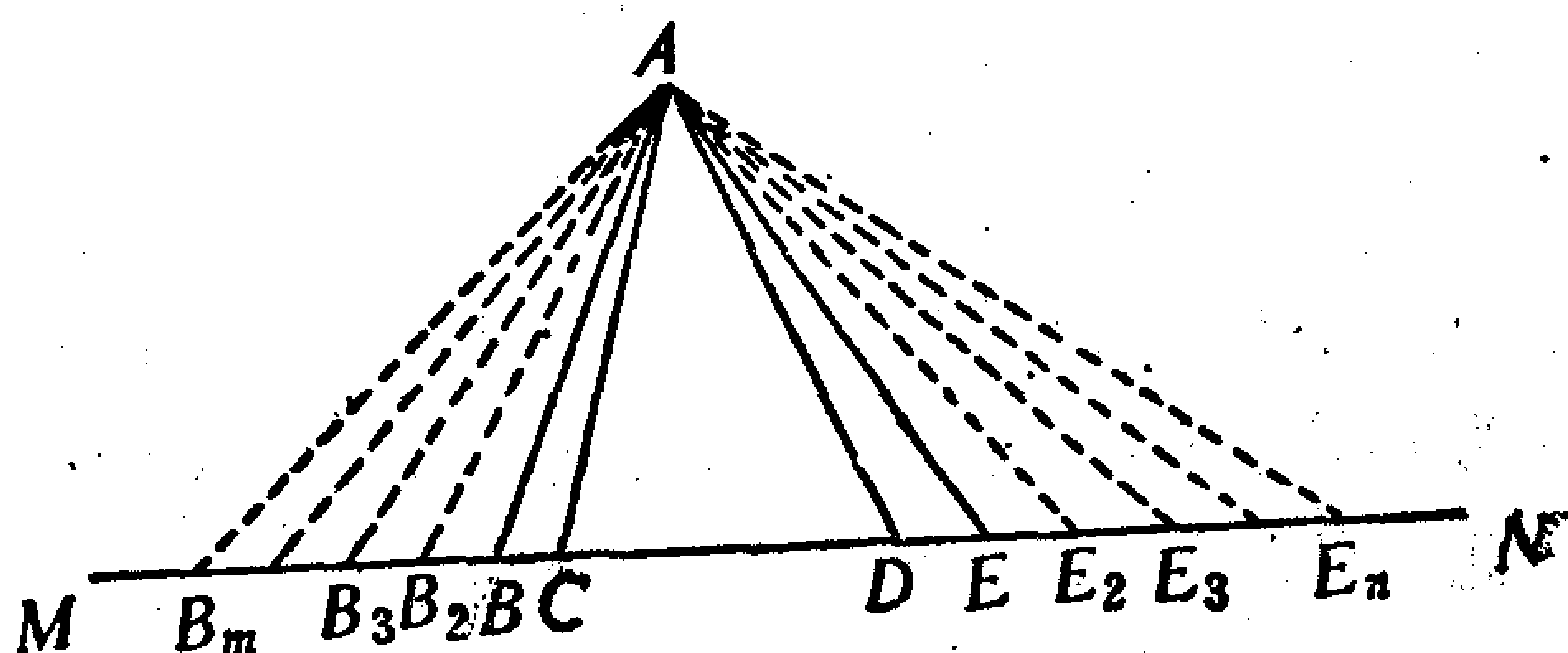


图22

定理　两个同高三角形面积之比等于其底之比。

尤多克萨斯的证明． 在CB的延长线上自B开始相继截取$m-1$个等于CB的线段，把诸分点$B_2, B_3 \cdots B_m$与顶点A联结起来（见图22）．同样，在DE的延长线上自E开始相继截取$n-1$个等于DE的线段，把诸分点E_2，E_3，$\cdots E_n$与顶点A联结起来。于是

$$B_mC = m(BC)，\triangle AB_mC = m(\triangle ABC)，$$

$$DE_n = n(DE)，\triangle ADE_n = n(\triangle ADE)，$$

此外，按照早已证明的结果，

$$\triangle AB_mC \gtreqless \triangle ADE_n \text{的充要条件是} B_nC \gtreqless DE_n.$$

因此,

$$m(\triangle ABC) \gtreqless n(\triangle ADE) \text{的充要条件是} m(BC) \gtreqless n(DE),$$

从而(据尤多克萨斯的比例定义)

$$\triangle ABC : \triangle ADE = BC : DE,$$

命题证毕。

上述证明根本不管有关的量是否可以公度,因为尤多克萨斯的定义对于两种情况都可以应用。因此,早期毕达哥达斯学派的处理中那种"逻辑丑闻"得到巧妙的回避。

后来,大约在公元前300年,欧几里德在其著名的《几何原本》卷V中对尤多克萨斯的比例理论提出了极好的阐释。B. 波尔查诺(1781-1848)在世时是一位不讨人喜欢的捷克斯洛伐克神父,也是一位不起眼的数学家,他讲过他自己的一段极妙的趣闻,说是欧几里德及其《几何原本》卷V当了他的医生。原来波尔查诺在布拉格度假的时候得了病,浑身打战,萎靡不振。为了免于心力交瘁,他顺手检起了欧几里德的《几何原本》,平生第一次拜读了卷V中对尤多克萨斯的比和比例的理论提出的精采阐释。那种巧妙的处理真是使他满心欢畅,他

说，他的病霍然痊愈了。在那以后，要是他的什么朋友觉得身体不舒服了，他就建议那人去读欧几里德对尤多克萨斯理论的介绍，说那是灵丹妙药。

平面几何与立体几何中某些命题所涉及的不可公度性，直到近代仍然使人感到是教学上固有的难点。许多中学课本的作者，认为尤多克萨斯的理论过于抽象，不适宜于入门的学生，所以提倡把证明分两种情况考虑：可公度的情况照毕达哥拉斯学派早期的方式处理，不可公度的情况则利用简单的极限概念来对付。有时候不可公度的情形沦为附录，由教员随意摆布，有时候甚至完全删掉，说是超出了课程的范围。近代大多数中学几何课本对不可公度的情况有所考虑，增加了完备实数系及其基本性质的知识。

现在让我们回到前面讨论过的命题，借助于一些简单的极限概念来解决不可公度的情况，特别是，我们将使用极限理论中下述易于接受的基本定理。

基本极限定理．若两个变量总是相等，各趋近于一个极限，则此二极限值相等．

现在就来讨论那个令人恼火的不可公度的情形。

定理　两个同高三角形面积之比等于其底之比．

不可公度的情形。如图23所示，设BC和DE不可

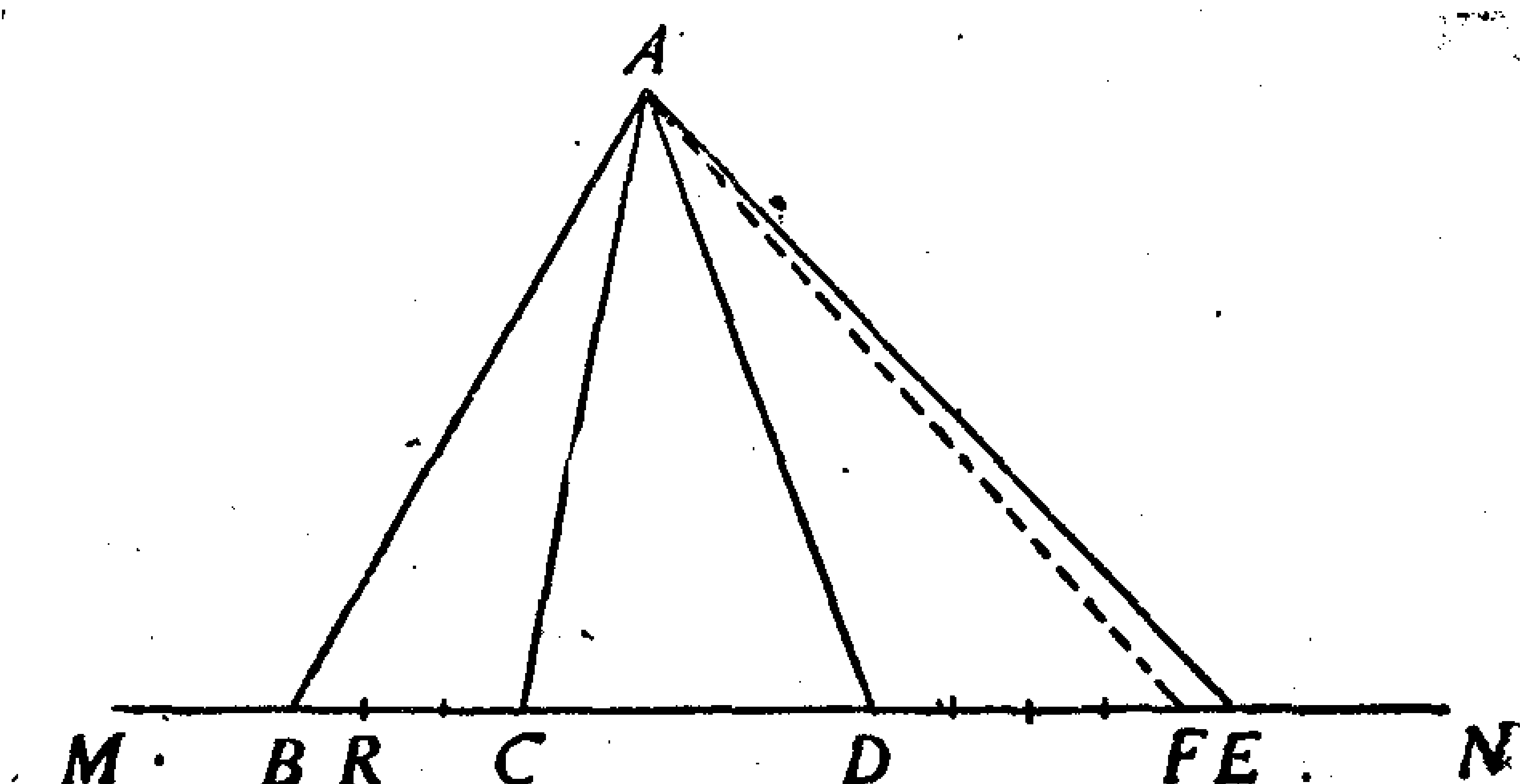


图23

公度，我们要证明

$$\triangle ABC : \triangle ADE = BC : DE.$$

把BC分成n等份，BR是其中一份。在DE上相继截取一系列线段，都等于BR，最后到达DE上的一点F，使得$FE < BR$。按照可公度情形的结果（假定已经按毕达哥拉斯学派早期的方式证明了），

$$\triangle ABC : \triangle ADF = BC : DF$$

现在让$n\to\infty$，则有$DF\to DE$，$\triangle ADF\to\triangle ADE$，从而$\triangle ABC : \triangle ADF\to\triangle ABC : \triangle ADE$，$BC : DF\to BC : DE$。

据基本极限定理可见

$$\triangle ABC : \triangle ADE = BC : DE,$$

这就证明了不可公度的情形。

上面的方法利用了任何无理数都可以视为一个有理数数列的极限这个事实，极限方法是曾经得到G.康托（1845—1918）严格论证的近代方法。

上述简单极限方法有很多内容值得收入中学的辨证几何。因为，首先，极限这个概念需要花时间才能吸收，学生如果能够通过某些重要的例子来琢磨这个概念，越早越多就越好；其次，极限理论也是从几何上研究面积和体积的本质工具；最后，在中学讨论极限有利于以后大学的数学学习，使学生碰到微积分的时候不致于毫无准备。虽然有公理方法来解决几何入门的问题，回避了分别讨论可公度情形与不可公度情形的需要，但极限理论在几何中其他地方仍然是必不可少的。特别是，学几何时会陆续发现，许多几何概念，例如曲线的**弧长**，曲线在其上一点处的**切线**，其定义都需要极限的概念。

在后面讲到的一个“数学史菁华”里，我们将会看到，某些现代的事件，至少就数学而言，如何证明了毕达哥拉斯的哲学是对的：一切都靠正整数。我们也会看到，使实数系完备化的一种近代方法是利用所谓**德底肯德分划**，这基本上是尤多克萨斯的比和比例理论的算术化提法。

练习

6·1　考虑下述命题：**同圆或等圆的圆心角之比等于其所截弧之比。**

(a)按毕达哥拉斯方式证明两个圆心角可公

度的情形。

(*b*)按尤多克萨斯方法同时证明可公度与不可公度两种情形。

(*c*)利用简单的极限概念证明不可公度的情形。

6·2 (*a*)利用毕达哥拉斯方法，结合简单的极限概念证明：平行于三角形一边的直线把另外两边分成相同的比。

(*b*)从讲演中证明的那个命题推出上述命题。

6·3 利用毕达哥拉斯方法，结合简单的极限概念证明下列命题：

(*a*)两个等高矩形面积之比等于其底之比。

(*b*)两个二面角之比等于其相应平面角之比。

(*c*)两个底面全等的长方体体积之比等于其高之比。

6·4 极限概念有三个特点应予切实注意：如果k是实变量x的极限，那么(1)k是常数；(2)x与k的数值差最终可以小于任何事先选定的无论多小的正量h；(3) x与k的数值差最终保持小于所选定的量h①。

设A、B、C是三个共线的点，B在A、C之间，它

① 条件（3）蕴涵条件(2)，但反之不然．例如，$x=(-1)^n$，$n=1,2,\cdots$，$k=1$，则条件（2）成立，但条件（3）不成立．——译注

们代表一条直线铁道上的三个车站，设x是一列客车T从A向C运行的距离。试据极限的上述三特点回答以下问题：

(a) 如果客车T从A出发，持续运行一直到C，是否可以说$\lim x = AB$？

(b) 如果客车从A出发，只行驶到B为止，是否可以说$\lim x = AC$？

(c) 假设一列货车F从A向C运行，从A开始的距离记为变量y。再设F出站一段时间后客车T也沿一条平行的铁道自A出发，追上了F，然后与F齐头并进，速度与F一样。是否可以说$\lim x = y$？

(d) 如果客车T从A出发，匀速运行直到终点C，是否可以说$\lim x = AC$？

(e) 假设客车T从A出发，减速向C运行，使得第一小时行驶了从A到C的距离之半，第二小时行驶了其余距离之半，第三小时又行驶了剩下的距离之半，继此以推。是否可以说$\lim x = AC$？

6·5 证明**基本极限定理**。

6·6 (a) 如果知道如何量度直线段的长度，那么圆周的长度可以怎样定义？

(b) 如果知道如何量度多边形的面积，那么圆面积可以怎样定义？

6·7 设P_n和A_n分别表示直径为1的圆外切正n

边形的周长和面积，试求$\lim_{n\to\infty} P$ 和$\lim_{n\to\infty} A$。

6·8 试利用极限概念提出下列概念的定义：(*a*) 曲线在其上一点处的切线，(*b*) 曲面在其上一点处的切平面。

6·9 (*a*) 如果知道棱锥体积是三分之一的底面积乘高，如何才能利用极限概念得到圆锥体积的公式。

(*b*) 如果知道正棱柱侧面积是底的周长乘以高，如何才能定义正圆柱的侧面积？

你也许会认为，正圆柱的侧面积可以定义为任何一序列内接多面体表面积的极限，只要多面体表面的面数无限增加，而最大面的面积趋于零。可是，H.A.施瓦尔兹（1843-1921）在十九世纪六十年代初证明并非如此，这叫当时的数学家大吃一惊。施瓦尔兹的例子实在让当时的数学家瞠目结舌，所以这个例子曾经叫做**施瓦尔兹的奇谈怪论**。

6·10 试据初等微积分课本复述$f(x)$在x_1处的导数的几何解释，即曲线$y=f(x)$在点(x_1, y_1)处的斜率，这里$y_1=f(x_1)$。

进一步的读物

Heath, T.L., *History of Greek Mathematics*, 2 vols. New York : Oxford University

Press, 1931.

Zames, Frieda, "Surface area and the cylinder area paradox," *Two-Year College Mathematics Journal*, *Sept.* 1977, pp. 205–211.

七、数学条理化初步

题材的公理演绎体系

（约在公元前350年）

继公元前600年塞利斯之后的三百年间，希腊人在数学上取得了许多光辉成就。毕达哥拉斯等人不仅研究出一大批初等几何与初等数论的结果，而且还提出了有关无穷小与求和法的一些概念，后来在十七世纪开花结果，发展成了微积分。此外，还研究过更为高等的几何（即是与直线和圆不同的某些曲线的几何。以及与平面、球面不同的某些曲面的几何）。很奇怪，高等几何的这些大量结果，其渊源却在于妄图解决古代三大著名难题：倍立方问题，三等分任意角问题以及圆改方问题①．这可以作为

① 这是古希腊三大几何作图问题，直到十九世纪才证明是不可能的：(1)倍立方问题：求作一立方体，其体积为已知立方体体积的二倍；(2)三等分任意角问题；(3)圆改方问题：求作一正方形，其面积为已知圆面积．问题(1)和(2)是P.L.万泽尔1837年证明为不可能的，问题(3)是C.L.F.林德曼于1882年证明为不可能的．应该强调的是，这里所谓的几何作图是指只准使用一把直尺和一副圆规．如果改变了这个要求，那就是另外一回事了。例如，L.比贝巴赫曾经证明，如果可以用两把直尺画矩形，再允许用一副圆规，那么问题(1)和(2)是可以作图的．—译注

下述原则的一个例证：数学的发展是靠未解决难题的提出来推动。

希腊数学在头三百年间最光辉的成就也许是希腊人关于"逻辑论说"的概念，即是从论说开始时采用的一组认可的原始陈述出发，利用演绎推理而得到的一系列陈述。的确，在用演绎方法提出一个论证时，对该论证的任何陈述都必须从该论证先前的某个或某些陈述推出，而这样一个先前的陈述本身又必须从更前的某个或某些陈述推出。由于这个过程不可能无限地反推回去，同时又不能诉诸不合逻辑的循环论证，即是从陈述p推出陈述q，然后又从陈述q推出陈述p，所以在论说之初就必须定下一组原始陈述，其真实性是要读者承认的，然后利用纯粹的演绎推理进而推出该论说的所有其他的陈述。

既然该论说的原始陈述和派生陈述都是与该论说的专门问题有关的陈述，所以就涉及特殊的用语，或专门的术语。这些术语应予定义。由于术语必须靠另一些术语来定义，而另外这些术语又要靠其他一些术语来定义，所以这里又面临一个难点，与讨论论说的陈述时碰到的难点相似。为了起动，为了避免循环定义，即术语y由术语x定义，然后术语x又由术语y定义，又不得不在论说之初就定下一组基本术语，希腊人觉得，还要说明这些术语的预

定用法。于是，该论说所有后来的术语则靠已经引进的术语来精心定义。

按照希腊人的意见，逻辑论说应按下述格式推演：

题材的公理演绎体系的格式

(A) 对该论说某些基本术语给予原始说明，目的是向读者提示这些基本术语的涵义。

(B) 胪列有关基本术语的某些原始陈述，使读者基于原始说明所提示的性质加以认可。这些原始陈述叫做该论说的**公理**或**公设**。

(C) 该论说的所有其他术语由先前引进的术语定义。

(D) 该论说的所有其他陈述由先前已经认可或已经证明的陈述经过逻辑演绎而得。这些派生的陈述叫做该论说的**定理**。

按照上述计划进行的论说，今天叫做按**题材的公理演绎体系**推演的论说。古希腊人对数学最卓越的贡献无疑就是提出了题材的公理演绎体系的格式以及坚持按照这一格式来建立数学体系。数学中公理演绎体系的概念应该算是数学史上"菁华"中之"菁华"。

为了对题材的公理演绎体系的格式取得感性认识，让我们考虑一个例子。这个例子看起来也许很简单，也许有点矫揉造作，但可以想见有人是会感到兴趣的，而且也能达到我们的目的。

我们这个论说的基本术语或原始术语是某个由人组成的（有限且非空的）集合S，以及这些人之间形成的某些集团。遵照希腊人的公理演绎体系的概念，我们首先向读者说明这些原始术语的涵义。所谓**人**，是指集合S中的任何男、女、小孩；所谓**集团**，是指这些人构成的（非空）子集，其目的也许是出于某种世俗的或其他的考虑。关于这些人及其集团我们有以下的假设：

$P1$. **S的每个人都至少是一个集团的成员。**

$P2$ **S的每一对人都恰好同时属于唯一的一个集团。**

定义. 没有共同成员的两个集团叫做**相配的集团**。

$P3$. **每个集团都恰好有唯一一个相配集团。**

上面有关我们的原始术语的三条**黑体**字陈述就是本论说的**公理**或**公设**。按照我们对原始术语预先提出的说明，读者不难发现，这些公设中任何一条都能得到认可，以便推演我们的论说。注意，为了使公设$P3$的陈述简明扼要，我们在它前面提出了一条定义[①]。

于是，从上面那一组公设出发，可以完全通过

① 作者是想提醒读者：简明扼要是数学论说完美性的一个特色（从学生演题直到方家撰文著书）．换句话说，如果不怕繁冗累赘，你也可以不要那个定义，而在以后每个有关的叙述里都把"相配"换成"没有共同的成员"这个较长的说明语．例如，P3 就可能写成"对于每个集团，都恰好存在唯一一个集团，使得它们之间没有共同的成员"．当然，是否提出定义要看以后需要的频度；如果"相配"的概念只出现一两次，似乎也就不必提出定义了．—译注

演绎过程得到若干推论。我们只打算推导出四个这样的推论。

$T1$。S的每一个人都至少是两个集团的成员。

设a是S的一个成员。据$P1$，存在含有a的一个集团A。据$P3$，存在集团A的相配集团B。由于B非空，所以至少含有一个成员b，而且$b \neq a$。据$P2$，存在一个集团C含有a和b。由于A与B是相配集团，所以b不属于A，从而$A \neq C$。因此，a属于两个不同的集团A和C。

$T2$。每一个集团都至少含有两个成员。

设A是一个集团。由于A非空，它至少有一个成员a。假设a是A的唯一成员，据$T1$，存在集团B，与集团A不同，且以a为其成员，所以B一定含有第二个成员$b \neq a$，否则集团A与B就会相同。据$P3$，存在B的相配集团C，从而A和B都是C的相配集团，但这与$P3$矛盾。因此，本定理由"归谬法"得证。

$T3$。集合S至少含有四个人。

在证明$T1$时我们已经证明：S中至少存在两个不同的人a和b。据$P2$，存在一个集团A，同时含有a和b。据$P3$，存在集团A的相配集团B，据$T2$，集团B一定至少含有两个成员c和d。由于A和B是相配集团，所以a，b，c，d是S的四个不同的人。

$T4$。至少存在六个集团。

在证明T_3时我们已经证明：存在四个不同的人

a，b，c，d，其中c和d属于集团B，a和b属于集团A，而A和B相配。由此可见，（含有a与c的）集团C，（含有b与d的）集团D，（含有a与d的）集团E以及（含有c与b的）集团F彼此相异，且各与A和B相异。因此，至少存在六个集团。

有毅力的学生可能愿意设法证明下面这个困难得多的定理。

$T5$。**每个集团至多含有两个成员。**

从我们的公设推出的这些结论就是本论说的**定理**，当然还可以胪列出相当多的这种结论。

简单的游戏理论往往可以按题材的公理演绎体系推演出来。例如，考虑熟知的“九宫格游戏”；游戏的术语有游戏板、圆圈、十字、获胜、平局，等等，这些术语应予说明或定义①；接着陈述游戏的规则，作为本论说的公设，只要懂得论说的基本术语，这些规则是完全可以接受的；然后从这些规则出发就可以进而演绎出游戏的定理，例如可以证明：**只要运筹得法，开局者不必败北。**

至于公理化方法的起源问题，历史学家持有两种不同的意见：**演变说**与**突变说**。演变说是事后几百年间有些作者津津乐道的传统说法，似乎也是今天

① “九宫格游戏”是一种儿童游戏，双方轮流在九宫格上各画圆圈或十字，以一方所画三个符号先共线（横、竖、斜）者为胜。——译注

较为流行的说法，认为公理化方法是古代在数学中应用演绎方法逐渐演变而成的自然结果与升华，短小的演绎过程变长了，好些个演绎过程钩连环结，成为更长的过程，沿途产生一些中介的结果。后来，还有人想出一个绝妙的主意：从最初提出的某些假设出发，沿着单独一条漫长的过程，一环套一环，演绎出整个几何学。如果这种演变说竟然正确，那么公理化方法的主要功绩应归于毕达哥拉斯学派。

有些研究古代数学的史家觉得上面的演变说很难置信，他们认为，传统的史话主要是稗官野史，而数学发展史上这样一个本质的转折点，一定是由于某种决定性事件而突然发生的，使人们清楚地认识到原始前提重要而微妙的作用，从而使思想的深度提到一个崭新的水平。如果情况确实如此，那个决定性事件是什么就无须深究了。那想必就是由于发现了无理数和不可公度的量而使数学基础摇摇欲坠的那场危机了。如果关于公理化方法的起源问题这一突变说竟然为真，那么其功绩多半应归于当时使那场根本危机烟消云散的天才人物尤多克萨斯。

公理化方法的起源问题也许不必多加揣测，不管怎么说，到公元前第四世纪与第三世纪交替之际，由于欧几里德应用公理化方法取得了划时代的辉煌成就，数学发展史上的这一阶段已经开始。

最后，我们指出，希腊人的题材公理演绎体系在二十世纪得到进一步的提高，成为现在所谓的**形式的公理演绎体系**，这本身就是数学史上的"菁华"，在以后的一讲里将予详述。我们将会看到，公理化方法新老两种观点有非常显著的差别。

练习

7·1 在逻辑论说中定义一个术语（不是原始术语）只是为了扼要说明已有的某些术语交织而成的一个复合概念，所以由定义引进的新术语实际上是强加于人的，虽然方便，都完全可以弃而不用；不过，这时论说中用到这个术语的地方，其复杂程度立即增大。例如，考虑初等几何课本中的下列定义：（1）四边形的**对角线**是联结该四边形两双相对顶点的两条直线段；（2）**平行线**是指同一平面上的若干直线，朝两个方向任意延长均不相交；（3）**平行四边形**是两双对边平行的四边形。

现在不使用上列任何黑体字术语重新陈述下面的命题："平行四边形的对角线互相二等分。"

7·2 在初等代数中，如果n代表正整数，k代表任何实数，我们定义符号k^n代表乘积$(k)(k)\cdots\cdots(k)$，这里k作为因子出现n次。请不使用指数改写下列表达式

$$[(a+b)^5(a-b)^3]^7,$$

其中a，b代表实数。

7·3 对下列数学符号给出习惯的定义，并说明其方便之处：

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

(b) $n!$，这里n是正整数，

(c) C_m^n，这里m和n都是正整数，$m \geq n$。

7.4.利用适当的定义把下列句子精炼为字数最少的句子："那位从事木器活的人把一件有四条腿的座位恢复到良好状态。"

7·5 一部词典必然采用循环解释法，不过希望使用该词典的人已经积累了适量的词汇，当他查阅某个不认识的词时，用来定义该词的那些词是他熟悉的。试查阅一本标准词典，对下列诸词循序跟踪，直到发现一个循环解释过程为止：(a) dead，(b) noisy，(c) line（按数学意义）。

7·6 "公理是不证自明的真理"，这个提法虽已过时，但仍时有所闻。试说明它反映了古希腊人题材公理演绎体系格式中的哪一条。

7·7 使用讲演中对题材公理演绎体系提出的那个例子中相同的基本术语，我们采用以下的公设：

$P1$。任何两个不同的集团都有唯一一个共同的成员。

$P2$。S的每个人都属于两个而且只属于两个集团。

$P3$。恰好有四个集团。

试由此演绎下列诸定理：

T1．S中恰好有六个人。

T2．每个集团都恰好有三个人。

T3．对于S的每一个人，S中恰好有一个另外的人，不属于同一集团。

7．8．证明讲演中对九宫格游戏提出的那个定理。

7．9．雪茄烟游戏由两个局中人把一大堆雪茄烟放在一张矩形桌面上；雪茄烟假定具有对称形状，并且全都是一个样子；两个局中人轮流（每次）把一支雪茄烟放在桌面上，同已经放上的其他雪茄烟都不重叠，也不伸出桌面的边缘，最后一个能把雪茄烟放在桌上的局中人获胜。试证明有关此游戏的下述定理：只要运筹得当，开局的人可以获胜。

7．10．A，B，C三人同时下两局国际象棋，A对B一局，B对C一局．A和C都是高手，B则是新手．A，B对弈时A用白子，B，C对弈时B用白子．试证明：只要运筹明智，B可以赢一局输一局，或者两局皆和。

进一步的读物

Wilder, R.L., Introduction to the Foundations of Mathematics, 2nd ed. New York: John Wildey, 1965.

八、数学家的圣经

欧几里德的《几何原本》

（约在公元前300年）

公元前323年马其顿古国的亚历山大大帝驾崩，辽阔的帝国随之分裂为三部分，包括埃及的那一部分归亚历山大大帝的一位雄才大略的将军托勒密·索特管辖。他治理有方，旋即在该地区称帝，建都于与尼罗河口相距不过数哩之遥的亚历山大港①。大约在公元前300年，托勒密王创办了著名的亚历山大大学，广邀四方学者在这所新学府执教，群星璀璨，其中就有数学家欧几里德。欧几里德可能一度在雅典的柏拉图学院听讲。

欧几里德在亚历山大大学就职后最先进行的一件数学工作，就是把他那不朽的历史性巨著《几何原本》汇编成书。这部非凡而广博的著作分为十三卷，流传至今，是公理化方法最早的应用，通常视为数学条理化历史上第一座伟大的里程碑。这部著作

① 从而建立了延续三百年的埃及托勒密王朝。—译注

对后世科学著作的影响怎么褒奖也不算过分。

欧几里德的《几何原本》是数学史"菁华"突出的候选者。这部著作很快就使先前同一性质的著作全都相形见绌，把它们全部淘汰了，所以更早的类似著作现在一本也没有留存下来，我们只是通过后世作者的评述才获悉先前有过这样的著作*。欧几里德的《几何原本》刚一问世，就获得高度的重视，两千多年来一直统治着整个几何教学，广泛使用，普遍传习和大量出版，历史上任何著作都无与伦比，只有《圣经》才堪称例外。自1482年第一次付梓以来，这部著作的各种版本已逾千种，其内容和形式对数学的主题及逻辑基础的发展产生了巨大的影响。

后来，五世纪的一位数学评论家普柔克勒斯为我们阐明了"原本"① 这个词的涵义：一种辨证研究的"原本"是该主题中频繁而广泛利用的那些最根本、最关键的定理，是所有或大多数其他定理的证明中必须的定理，其作用相当于字母在语言中的作用；实际上，希腊语中字母的称呼就是用的这个

---

* D.赫尔倍特曾经指出：一部著作的价值可以根据被它淘汰的早期著作的数量来判断．—原注

① "几何原本"是明代万历三十五年(1607年)徐光启(1562—1633)与意大利传教士利玛窦(Metteo Ricci)合译前六卷时的译名，当时可能是指"几何基础教科书"之意，所以"原本"一词我们现在也不妨理解为"本原"，即"基本原理"或"基础理论"之意．—译注

名字。作为一个主题之原本的那些命题，其取舍需要作者具有相当的熟练程度和判断力。

欧几里德的前辈们所取得的成就丝毫无损于他的光辉业绩。据普柔克勒斯说，公元前五世本纪中叶，凯尔斯岛的赫坡克勒底最先尝试搞个"原本"。其次是利昂的成就，他大约是柏拉图和尤多克萨斯之间某个时期的人。据说，利昂著作中选择的命题比赫坡克勒底的著作更为广泛，更为适用。柏拉图学院使用的教本是马格尼舍的塞代尔斯编辑的，曾经被认为是对原本极好的辑录。塞代尔斯的著作显然是欧几里德著作的直接前身，无疑得到欧几里德的利用；如果据传欧几里德还在柏拉图学院学习过，那就更是如此。欧几里德也熟悉塞尔德塔斯和尤多克萨斯的工作。因此，欧里几德的著作在很大程度上是他的前辈们著述的汇编，但这丝毫没有贬意，因为欧几里德《几何原本》的主要功绩恰好在于选择命题、编排成合乎逻辑的顺序、从一小批原始前提出发进行演绎推理的那种无懈可击的技巧。现代评论虽然已揭示出欧几里德著作结构上的某些缺点，但这也无所毁损，因为对于这样一部古代的公理方法的巨著很难设想是白璧无瑕的。

现存的欧几里德《几何原本》没有一个版本是出自作者的时代，《几何原本》所有的现代版本都是基于亚历山大港的塞恩整理的修订本。塞恩是一

位希腊评论家，生活在欧几里德之后几乎七百年的时期。直到十九世纪初才发现了一个更早的抄本。1808年，拿破仑发布命令，把意大利各图书馆的珍贵手稿运到巴黎，这时F.佩拉尔德才在梵蒂冈图书馆发现欧几里德《几何原本》的一个十世纪的抄本，原版日期是在塞恩修订本之前。不过，研究表明，这个更早的版本与塞恩的版本差别甚微。

《几何原本》最初的一些拉丁文全译本不是译自希腊文，而是译自阿拉伯文。在第八世纪，阿拉伯人曾经为拜赞庭帝国① 翻译过一些希腊著作；1120年，巴兹城②的英国学者阿德拉德曾据《几何原本》的这样一个阿拉伯文译本转译为拉丁文。还有一些转译自阿拉伯文的拉丁文译本，其中有克里蒙纳城③的格拉尔多（1114—1187）的译本，以及继阿德拉德之后150年的J.坎帕纽斯的译本。《几何原本》的第一版印刷本是1482年在威尼斯出版的，内容就是坎帕纽斯的译本。这本很难搜求的书装帧精美，是正式付印的第一部重要的数学著作。1572年，寇芒底诺由希腊文译成拉丁文，这是一个重要的译本，是以后的许多译本的基础，其中就有R.斯姆森那部极有影响的译本，由这个译本又依次

① 即东罗马帝国，第五世纪至十五世纪存在于南欧西亚地区—译注

② 英国西南部城市。—译注

③ 意大利北部城市，以产小提琴著称。—译注

衍生出许多英文版译本。

著名的法国数学家A·M.勒让德（1752—1833）在数学史上主要以其数论、椭圆函数论、最小二乘法以及积分论等方面的工作著称，他也关心教学工作。勒让德在其脍炙人口的著作《几何原理》中试图对欧几里德的《几何原本》从教学观点上加以改进，即是对欧几里德的许多命题进行了可观的重新组织与简化。这本著作曾经在美国极受欢迎，成为美国许多几何课本的原型。事实上，勒让德这部几何著作的第一个英译本是1819年哈佛大学的J.法如尔翻译的。三年以后，另一个英译本出现了，译者是著名的苏格兰作家T.卡莱尔，他早年当过数学教师。卡莱尔的译本，以及后来别人的修订本，在美国一共出了33版。直到近代，大多数美国中学几何课本都是仿照勒让德的格式编写的。

就塞恩的版本而言，欧几里德的《几何原本》共有十三卷，总共465个命题，与一般人的印象相反，大部分材料不是讲几何，而是讲初等数论和希腊代数。

卷Ⅰ首先讲必要的预备性定义和说明、公设和公理。今天的数学家虽然都把“公理”和“公设”当成同义词使用，但古代有些希腊人却是有所区别的。欧几里德的区别似乎是：公理是所有研究领域共同的原始前提，而公设则是专属于正着手进行的

具体研究的原始前提。卷Ⅰ的诸命题中有熟知的关于全等、平行线以及直线形的定理。命题47和48，该卷最后的两个定理，是毕达哥拉斯定理及其逆定理。这里使人想起英国哲学家T．霍布斯（1588—1679）的一个故事。有一天，霍布斯偶然翻开欧几里德的《几何原本》，看到毕达哥拉斯定理，他大叫一声，“凭上帝发誓，这根本不可能！”接着他追根究底，倒查回去，查阅了卷Ⅰ有关的说明，一直追到公理和公设，这时他心悦诚服了。

卷Ⅱ篇幅不多，只有14个命题，主要是论讨毕达哥拉斯学派用几何方法求解代数问题。我们在第四讲已经说过，本卷的命题12和13本质上是毕达哥拉斯定理的推广，即现在所谓的余弦定律。

卷Ⅲ有39个命题，都是我们现行中学几何课本中可以找到的熟知定理，讨论圆、弦、割线、切线以及角的量度。卷Ⅳ只有16个命题，专门讲已知圆的某些内接或外切正多边形的圆规直尺作图法。

第六讲已经指出，卷Ⅴ对尤多克萨斯的比例理论做了极为高明的阐释。这一卷被视为数学文献中一件上乘杰作。请回想一下第六讲，波尔查诺在布拉格度假时得了病，正是读了这一卷他便沉疴若失霍然而愈。卷Ⅵ是《几何原本》内容最丰富的一卷，是应用尤多克萨斯的理论来研究相似形。

卷Ⅶ，Ⅷ和Ⅸ总共有102个命题，讨论初等数

论。卷Ⅶ首先讲求两个或几个整数的最大公约数的算法，即现在所说的**欧几里德辗转相除法**；此外还阐述了毕达哥拉斯学派早期的比例理论。卷Ⅷ主要是讲连比以及有关的几何级数。如果我们有连比$a:b=b:c=c:d$，则a，b，c，d构成几何级数。卷Ⅸ中有许多重要的数论定理，其中命题14等价于重要的**算术基本定理，即任何大于1的整数均可表为素数的乘积，表法本质上是唯一的**。卷Ⅸ的命题20是说，**素数有无穷多个**，其证明非常高明。卷Ⅸ的命题35是对几何级数头n项和的公式给以几何上的推导。该卷最后一个命题是命题36，证明了一个产生偶完美数① 的重要公式。

卷Ⅹ是难读的一卷，讨论无理数，也就是讨论与已知线段不可公度的线段。其余三卷，卷Ⅺ，Ⅻ和XⅢ，讨论立体几何，材料丰富，但却没有收入现代中学课本中常见的有关球面的材料。在下一讲里我们可以看到，有关球面的基本材料是后来由阿基米德提供的。

美国现行的中学平面几何及立体几何课本的内容，基本上就是欧几里德《几何原本》卷Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅵ Ⅺ和Ⅻ的内容。现行中学课本中有关圆与球面的量度问题以及立体几何中有关球面三角的材料，

---

① 定义见第十一讲．—译注

在欧几里德的《几何原本》中是没有的，因为这些内容的发端更晚。

除了欧几里德的《几何原本》以外，古希腊还有另一些巨著流传下来，例如，阿基米德那些深奥的著作、阿波罗尼斯的《圆锥曲线论》、托勒玫的《大综合论》、赫隆的《测量学》、刁番图的《算术》、麦尼雷斯的《球论》、巴布斯的《数学荟萃》，等等，所有这些或其中很多，在遴选“数学史菁华”时，也许都值得收入内容更广泛的一个连续性讲座，但我们目前这个节选中只能介绍其中几个重要著作。然而，“数学史菁华”的遴选无论怎样精简，欧几里德的《几何原本》都在高中之列。

由于以后几讲我们要考虑某些重要的后果，所以在结束本讲之际，让我们列出欧几里德的公设和公理。

公设

1.对于任何两个已知点，可以画一条直线段把它们联结起来。

2.直线段可以朝两个方向无限延长成直线。

3.以任何已知点为心、过任何第二个已知点可以画一个圆。

4.所有的直角彼此相等。

5.如果一条直线与另外两条直线相截，有一侧的两个同侧内角之和小于两个直角，则此二直线无

限延长时相交，交点落在两个内角之和小于两个直角的那一侧。

公理或常理

1. 等于同一个量的诸量彼此相等。

2. 等量加等量，其和相等。

3. 等量减等量，其差相等。

4. 彼此叠合的量相等。

5. 整体大于部分。

注意，头三条公设规定：作图只能用圆规和没有刻度的直尺进行。因此，这两件工具往往叫做“欧几里德作图工具”，可以由这两件工具完成的作图法则叫做“欧几里德作图法”。欧几里德曾经用作图法在存在定理中证明某些对象的确存在。例如，已知角的**平分线**可以定义为该角所在平面上的一条直线，过角的顶点，把已知角分成两个相等的角。但是定义并不能保证所定义的事物存在，这需要证明。为了证明已知角的确有平分线，我们可以证明该对象可以实际作图。存在定理在数学上很重要，而一个对象的实际作图则是证明其存在的最令人满意的办法。我们可以定义“方圆”是既方又圆的图形，但我们根本无法证明这样的对象存在；“方圆”的集合是没有任何元素的集合。在数学上，要知道满足一定条件的某些对象的集合并非空集，这件事情是很讲究的。

有些作图法不限于使用欧几里德作图工具，从而使几何学的这一方面妙趣横生。现在已经知道，只用这两种工具有些作图是不可能的，过去的尝试虽然徒劳，但结果却发现了不少有趣的几何事实。

以后我们将会看到，欧几里德的第五公设在十九世纪引起了对数学发展极为重要的结果。C.J.凯瑟把这条公设叫做“科学史上最著名的独特说法。”

练习

8·1 如果你要从下列定理中选择两条作为平面几何课程“原本”，你愿意选择哪两条呢？

1.三角形三条高线（必要时加以延长）交于一点。

2.三角形三个角之和等于两个直角。

3.圆周角由所截弧之半量度。

4.相交两圆的公共弦的延长线上任何一点所作两圆的切线长度相等。

8·2 (*a*)一位几何教师要在班上讲平行四边形这个题目。在定义了平行四边形之后，他应该提出哪些平行四边形定理作为这个主题的“原本”？

(*b*)一位几何教师准备讲相似形这个题目，他先用一两节课讲比例理论，他应该选择哪些定理作为讲授的“原本”，应该按什么次序讲？

8·3 (a)一位数学教师要在大学代数课上介绍几何级数这个题目。在定义了这种级数之后，他应该提出几何级数的哪些定理作为这个主题的"原本"？

(b)假定你要对三角恒等式给以初等论述，你会选择哪些恒等式作为论述的"原本"，你会按什么次序论述？

8.4.作为欧几里德《几何原本》中包含非几何性材料的例证，让我们考虑欧几里德的**辗转相除法**，即是求两个正整数的最大公约数(g.c.d.)的过程。这个方法列在《几何原本》卷Ⅶ的开头，虽然毫无疑问在欧几里德以前就已经知道了。这个算法是现代数学许多研究工作的基础，可以陈述为下述形式的一条规则：**对于这两个正整数，用小的一个去除大的一个，然后再用余数去除除数，继此以推，用末一个余数去除末一个除数，除尽为止。最后的除数就是所求的原来两个正整数的g.c.d.**.

(a)用辗转相除法求5913和7592的g.c.d.。

(b)用辗转相除法求1827，2523和3248的g.c.d.。

(c)证明：用辗转相除法的确能够得到g.c.d.

(d)设h是正整数a和b的g.c.d.，证明：存在整数p和q（不必为正），使得$pa+qb=h$。

(e)对于问题(a)中的整数求p和q。

(*f*)证明a和b互素的充要条件是：存在整数p和q，使得$pa+qb=1$。

8·5 (*a*)利用练习8.4(*f*)证明：如果p是素数，整除乘积uv，则不是p整除u，就是p整除v。

(*b*)利用问题(*a*)证明 **算术基本定理：任何大于1的整数均可唯一分解为素因子的乘积。**

(*c*)求整数a，b，c，使得$65/273=a/3+b/7+c/13$。

8·6 算术基本定理说：对于任何正整数a，唯一存在非负整数a_1，a_2，a_3，…，其中只有有限多个不为零，使得

$$a=2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}\cdots,$$

这里2，3，5，…是相继的全体素数。由此可得一个有用的记法：我们记

$$a=(a_1,\ a_2,\ \cdots a_n),$$

这里a_n是最后一个非零指数，例如，我们有$12=(2,1)$，$14=(1,0,0,1)$，$27=(0,3)$，$360=(3,2,1)$。证明下列诸定理：

(*a*) $ab=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \cdots)$。

(*b*) b是a的因子的充要条件是：对所有的i有$b_i\leqslant a_i$。

(*c*) a的因子个数是$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)$。

(*d*) a是完全平方数的充要条件是：a的因子个数是奇数。

(*e*) 如果$a_i \neq b_i$，令g_i是a_i和b_i中最小的；如果$a_i = b_i$，令g_i是a_i和b_i中任何一个。于是$g = (g_1, g_2, \cdots)$就是a和b的g.c.d.

(*f*) 如果a与b互素，b整除ac，则b整除c。

(*g*) 如果a与b互素，a整除c且b整除c，则ab也整除c。

(*h*) 证明$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$是无理数。

8·7 欧几里德把圆定义为"平面上一条线包围起来的图形，使得位于该图形内的那些点中有一个特殊的点，从该点出发、落在该图形上的所有直线都相等。"圆的这一定义与现代的定义有何不同？

8·8 欧几里德公设3的意义应该了解清楚。这条公设是说：给了两个点A和B，可以画中心为A、半径为AB的圆。可见欧几里德的圆规与我们现代的圆规是不同的，因为用现代的圆规画圆可以取任何一点A为圆心、取任何线段BC为半径，也就是说，可以用圆规作为两脚规把距离BC搬到圆心A。另一方面，可以认为，欧几里德的圆规如果有一条腿离开纸面就会解体。

一个学生如果第一次读欧几里德的《几何原本》，也许会对卷Ⅰ开头几个命题感到诧异。头三个

命题是作图问题：

I.1.**在已知线段上画等边三角形。**

I.2.**从已知点画一线段，等于已知线段。**

I.3.**从两条已知线段中较长的那条线段上截取一条线段，等于较短的那条线段。**

这三个作图题用直尺和**现代**圆规来作是太简单了，但是用直尺和**欧几里德**圆规来作则需要一点巧思。

(a)用欧几里德作图工具解作图题I.1。

(b)用欧几里德作图工具解作图题I.2。

(c)用欧几里德作图工具解作图题I.3。

(d)试说明命题I.2如何证明了直尺和**欧几里德**圆规等价于直尺和**现代**圆规。

8.9.欧几里德《几何原本》卷Ⅱ中有些代数恒等式是用几何方法证明的。试说明下列各恒等式怎样用几何方法证明，这里假定a, b, c, d都是正数：

(a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

(b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a>b$,

(c) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, $a>b$,

(d) $a(b+c) = ab + ac$,

(e) $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$, $a>b$,

(f) $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$.

8.10.(a)设r和s表示二次方程

$$x^2 - px + q^2 = 0$$

的根，这里p和q都是正数。证明$r+s=p$，$rs=q^2$，并且当$q\leqslant p/2$时r和s都是正数。

(b)要用几何方法求问题(a)中那个二次方程的实根，我们必须从已知线段p和q求出线段r和s，即是要作一矩形，等价于一个已知正方形，且长宽之和等于一条已知线段。试据图24设计一个适当的作

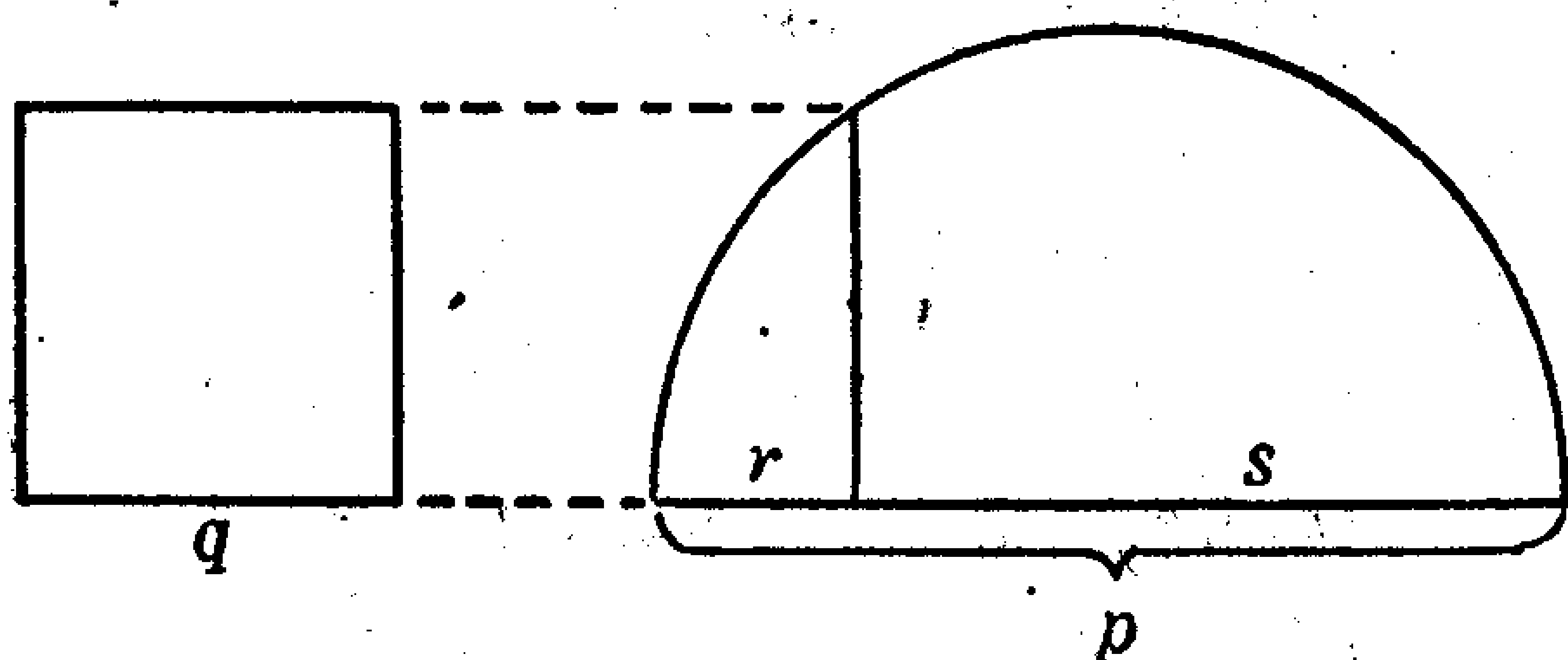


图24

图法，从几何上证明：要存在实根必须有$q\leqslant p/2$。

(c)设r和s表示二次方程

$$x^2-px-q^2=0$$

的根，这里p和q都是正数，证明：$r+s=p$，$rs=-q^2$，并且这两个根都是实数，一个为正，一个为负。

(d)要用几何方法解问题(c)中那个二次方程，我们必须从已知线段p和q求出线段r和s，即是必须作一矩形，等价于一个已知正方形，且长宽之差等于一条已知线段。试据图25设计一个适当的作图法。

(e)试设计一个作图法，从几何上求解二次方程$x^2+px+q^2=0$及$x^2+px-q^2=0$的实根，这里

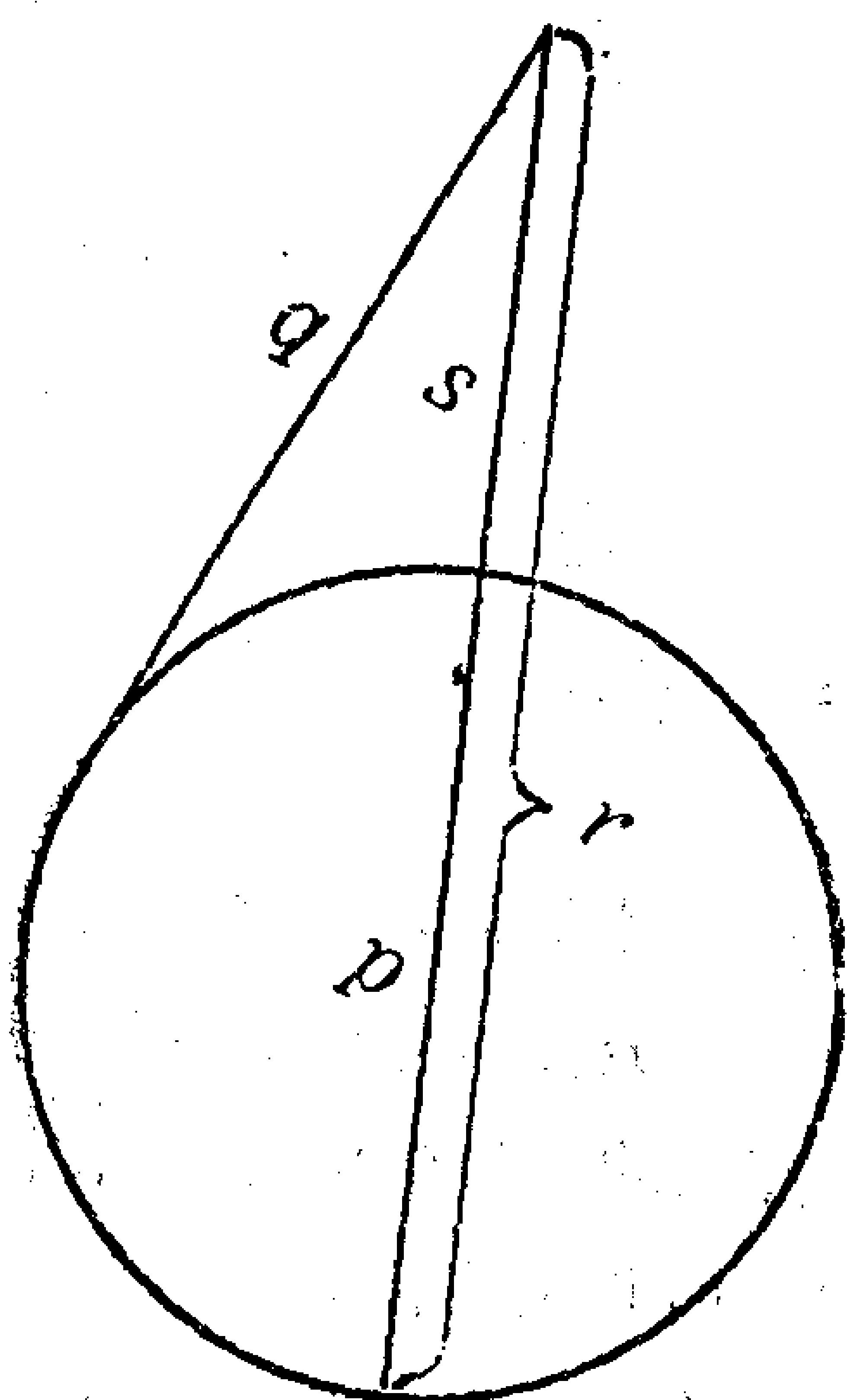


图25

p和q都是正数。

(*f*)给了单位线段，用几何方法求解二次方程$x^2-7x+10=0$。

(*g*)给了单位线段，用几何方法求解二次方程$x^2-4x-21=0$。

(*h*)用圆规直尺把一个线段a分成两部分，使得这两部分的平方差等于其乘积。

(*i*)证明：问题(*h*)中较长的那条线段是较短的那条线段与整个线段的比例中项。(这时整个线段称为分成**中外比**，或者说分成“**黄金分割**”，见第五讲。)

进一步的读物

Heath, T.L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 2nd ed., 3 vols. New York: Cambridge University Press, 1926. Reprinted by Dover, 1956.

九、思想家与暴徒

阿基米德论球

（約在公元前240年）

现代数学的伟大成就，追本穷源，有多少来自两千多年前古希腊人的业绩，这是人们意想不到的。二十世纪初哈佛大学杰出的几何学家J.L.库里芝喜欢说的一句话是：“当时世上有巨人。”所有那些巨人中真正最伟大的巨人，毫无疑问，就是赛锐克尤斯城[①]著名的阿基米德了，他的数学才能真是不可思议。在本讲中，我們将会看到，阿基米德使用有限的工具求出了某些平面曲线图形的面积以及某些曲面图形的体积，从而开创了积分学，经过了很多很多年，由于开普勒、卡瓦列里、费马、瓦利斯、巴若、莱布尼兹及牛顿等人的努力才臻于完善。

阿基米德，西西里岛上希腊古城赛锐克尤斯人氏，生于公元前约287年，卒于公元前212年，当罗

① 公元前734年建立的古城，今意大利西西里岛东南部海港。——译注

马人掠夺赛锐克尤斯城之际遇难。他是一位天文学家的儿子，深得赛锐克尤斯国王海容的宠幸。一般认为，他曾在埃及亚历山大大学游学数年，因为他有三个朋友柯农、多塞瑟思、厄锐托瑟尼斯，都在那所著名学府任职。这三位是欧几里德的传人，很有才华，阿基米德的许多数学发现都曾同他们交流过。

后来，古罗马的史家曾经绘声绘色地讲述许多有关阿基米德的故事。例如，据说，在罗马大将马赛拉斯率部围困赛锐克尤斯两年期间，阿基米德曾精心设计出某些机巧的装置，协助城防，使马赛拉斯屡遭挫折：有射程可以调整的弩炮；还有架在支座上的投掷器，可以迅速转移到城墙上任何部位，把重物投向正在逼近的敌船；还有升降灵活的巨型起重机，可以把来犯的船只从水面抓起来，摇得粉碎。阿基米德使用大凸透镜聚光，使外围敌船的帆篷起火，这个故事起源稍晚，不过倒可能真有其事。还有一个故事说，阿基米德优哉游哉地坐在海边一把椅子上，一只手操纵一架复合滑轮，毫不费力地把一艘重载的船从船坞搬到水里。这样一来，人们便不得不相信他那夸口的名言了："试假我以立足之处，我将能搬动地球。"

阿基米德也象别的大数学家那样，很善于聚精会神；有些故事说，他全神贯注考虑问题的时候，

周围的一切便视若无睹了。有一个老生常谈的故事，说的是海容国王和一个受到怀疑的金匠：海容国王叫那个金匠给他做一顶金冠，做好以后国王担心那金匠暗中把金子换成了银子。国王不愿把金冠打碎来检验真伪，便把这个问题交给阿基米德去解决。有一天，阿基米德在城里浴室洗澡，灵机一动找到了解决的办法，原来他发现了流体静力学第一定律：**浸没在流体中的物体受到的浮力等于所排出流体的重量**。阿基米德由于这一发现而极为兴奋，他从浴盆里站起来，忘了穿衣服，穿过大街小巷向家里跑去，一边高声喊道："我想出来啦！我找到啦！"*

阿基米德的许多几何发现，是在炉灰堆上画图，或者是浴后身上抹的那一层油上画图想出来的。事实上，古罗马的史家说，阿基米德丧命的时候，正在全神贯注地思索画在沙盘上的一个几何图形，当时，由于围城警戒一时疏忽，马赛拉斯及其部队终于破城而入；另一个说法还说，这时有一个罗马兵士的影子落在他的图形上，阿基米德便向身后

---

* 1974年，J.C.W.德拉贝尔在《澳大利亚数学会会刊》十二月号上发表了一首小诗，为我们记载了这一事件，令人捧腹：

赛锐克尤斯城的阿基米德
试穿那新闻编织的衣裳，
高喊"我想出来啦！"
成为裸跑创始人。
——原注

捣乱的人挥手示意，不要把他的图形搞乱了，于是那个怒气冲天的掠夺者便一枪刺穿了老人的身体。

阿基米德的著作有十份流传下来，另外还发现了某些散佚著作的蛛丝马迹。现存的著作都是数学诠释的精品，叙述完美，布局谐调，表现出高度的创见、巧妙的计算以及严谨的论证。这些著作中对数学贡献最大的，也许是积分法的早期研究。我们现在就来讲这项卓越的成就。

阿基米德有些著作使用的步骤相当于进行一次真正的积分运算。我们这里只讨论两份著作：一份是阿基米德自己的得意之作，《论球与圆柱》；另一份是发现不久的著作，题为《方法》。第一份著作分为两卷，总共有60个命题，给出了球、球冠以及球台的表面积与体积的正确表达式，这在数学史上似乎是破天荒第一次。球的表面积和体积是卷Ⅰ命题33和34的一个推论，其提法别具一格：一个圆柱如果其底面等于一个球的大圆，其高等于该球的直径，则其总面积（侧面加两底）正好等于球面积的$\frac{3}{2}$，其体积正好等于球体积的$\frac{3}{2}$。由此容易得到半径为r的球的表面积S和体积V的熟知公式：

$$S=4\pi r^2,\ V=4\pi r^3/3.$$

阿基米德用一连串的命题巧妙地、一步一步地推出这些结果，正是在这些命题中蕴藏着积分的思想。

不过，我们看到的不是现代直截了当的极限方法，而是间接、笨重但也是有用的双重**归谬法**，称为**尤多克萨斯的穷举法**。尤多克萨斯的穷举法可以作为“数学史菁华”收入内容更广泛的连续性讲座，我们这里就不加说明了，因此，我们也就不去仔细推敲阿基米德如何巧妙地证明了球面积和球体积的上述两个公式了*)。不过，我们将相当详细地来考察阿基米德在其著作《方法》中提出的论述，其中他谈到他如何首先归纳出所说的公式。这个论述不仅明显地涉及积分的思想，而且也对发现真理提供了一种有意义的方法。

阿基米德的《方法》过去一直长期散佚，绝响多年，只见于引文，直到1906年，德国杰出的数学史家J.L.赫贝格才在君士坦丁堡发现了一件十世纪的抄本，这是一份羊皮纸重写件，即是把几世纪以前羊皮纸上原有的墨迹洗掉重新利用，写上别的东西，但是随着时间的推移，原有的墨迹又隐约出现在后来的墨迹下面。这份著作的形式是写给亚历山大大学厄锐托瑟尼斯的一封信。

穷举法虽然严格，但却不产生新结果，即是，公式一旦知道，穷举法可以提供一个极好的工具来

---

* 不过，我们可以指出，几乎任何中学立体几何课本中都可以找到本质上是阿基米德的论述，但经过了现代极限理论的改进。——原注

证明这个公式，但是穷举法无助于该结果最初的发现*。那么，比如说，阿基米德在其《论球与圆柱》这篇著作中利用穷举法加以巧妙证明的那两个公式又是怎样发现的呢？这个问题阿基米德在其著作《方法》中给出了回答。

阿基米德方法（全名叫做阿基米德平衡法）的基本思想如下：要求出所要的面积或体积，就把它切成大量的平行细长条或平行细长块，设想把这些切片挂在一架杠杆的一头，使得它们与某个形体处于平衡状态，这个形体的容积、质心已经知道。现在让我们利用这一方法来找出球的体积公式，从而也就说明了这一方法。

设r是球的半径，把球的两极放在水平的x轴上，北极N位于原点（见图26）。让面积为$2r\times r$的矩形$NABS$和三角形NCS(这是一个等腰直角三角形，两腰之长为$2r$)绕x轴旋转，从而得到一个圆柱和一个圆锥。现在从这三个立体上切下三条铅直的细长块(假定它们都是扁平的圆柱)，与N相距x，厚度为Δx。这三块的体积近似等于

球：$\pi x\ (2r-x)\ \Delta x$，**

圆柱：$\pi r^2\Delta x$，

---

* 在这方面，穷举法很象中学代数课里碰到的数学归纳法．——原注．

** 这一块的半径是x与2r－x的比例中项．——原注

图26

圆锥：$\pi x^2\Delta x$。

从球和圆锥上取出相应的两块，把它们挂在T处，重心位于T，这里$TN=2r$。这两块关于N的合矩*是

$$[\pi x(2r-x)\Delta x+\pi x^2\Delta x]2r=4\pi r^2x\Delta x.$$

注意，这个值正好是从圆柱上切下的那一块原地不动时关于N的矩的四倍。把所有这样的细长块加在一起我们得到

$$2r[\text{球体积}+\text{圆锥体积}]=4r[\text{圆柱体积}]$$

---

* 一个体积关于一点的矩是指该体积乘以该点与体积质心的距离。—原注

或

$$2r\,〔球体积+\frac{8\pi r^3}{3}〕=8\pi r^4,$$

或

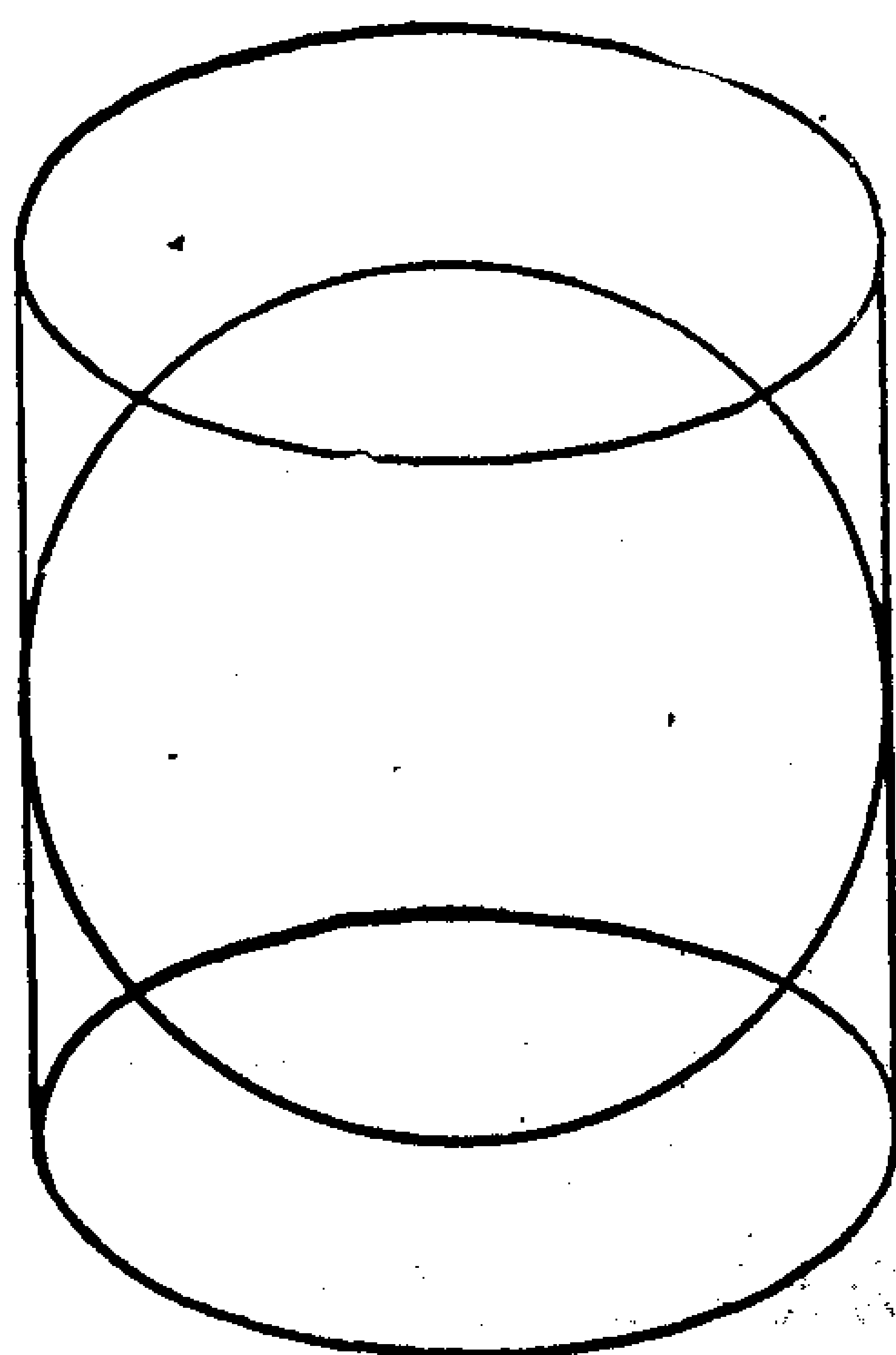
$$球体积=\frac{4\pi r^3}{3}.$$

阿基米德在《方法》里告诉我们，他就是这样求得球体积的公式的。但是，阿基米德的数学良知使他认为，这样的方法不能算是证明，因此他利用穷举法给出一个严格的证明。

在阿基米德的平衡法中，我们看到，把总量视为大量元件的合成，这一思想虽然基础不稳，但却行之有效。不用说，利用现代的极限理论，可以使阿基米德平衡法达到完全严格化，与现代积分原理实质上是一回事。因此，从几乎任何观点来看，我们这里所讲的阿基米德的工作都肯定是名副其实的“数学史菁华”。

《论球与圆柱》是阿基米德的得意之作，所以他说，他希望在他过世以后人们能够把球内切于圆柱这个图形(见图27)镌刻在他的墓碑上。阿基米德在赛锐克尤斯包围战中作为马赛拉斯的对手屡建奇功，使马赛拉斯对他敬慕不已，所以马赛拉斯获悉阿基米德在城破时遇难之后，便为阿基米德举行了隆重的葬礼，在他的墓地勒石树碑，镌上他要求的那

个图形。过了很多年，担任古罗马财务官的杞切柔到赛锐克尤斯来收税的时候，竟然找不到人能够指出阿基米德的墓地了。好不容易经过一番搜索他才在荆棘丛中探寻出阿基米德的墓碑，于是他把陵园修葺一新。但是，随着岁月的流逝，墓地又沦于荒芜，而且由于该城这么多世纪以来的发展，似乎早已荡然无存，永不可考了。可是，1965年，一架蒸汽掘土机在为赛锐克尤斯一家新旅馆挖地基的时候，居然挖起来一块墓碑，上面赫然镌刻着球内切于圆柱的那个图形，于是，赛锐克尤斯人中那位佼佼者的墓地再一次被发现。


图27

捷克斯洛伐克科学家P。贝克曼（现属科洛拉多大学电机工程系）认为，历史主要是世界上两类人之间的生死斗争形成的，一类人是思想家，一类人是暴徒。关于这两类人，贝克曼提出了一个说明，可以称之为**贝克曼定律**：“在思想家与暴徒的斗争中，暴徒总是战胜思想家，但思想家总是比暴徒存在得

更久。”例如，那些古希腊人，尤其是阿基米德，都是思想家，而那些古罗马人，尤其是马赛拉斯，则是暴徒。在阿基米德和马赛拉斯的较量中，马赛拉斯胜利了，但阿基米德的业绩却远比马赛拉斯的所作所为流传得更久。最伟大的爱尔兰人W.R.哈密尔顿爵士被争誉为数学的光彩，他有一次谈到这个生死斗争时说："谁不愿宁可享有阿基米德的声望，而不担受战胜阿基米德的马赛拉斯这个骂名呢？”此外，英国哲学家A.N.怀特赫德缅怀阿基米德逝世时指出："没有一个古罗马人是在冥思苦想几何图形时死去的。”虽然贝克曼定律保证人类对阿基米德的记忆比对马赛拉斯的记忆更为持久，但杰出的英国数论大师G.H.哈迪还向我们保证说，即使在古希腊的思想家中，“当伊斯克勒斯[1]被人忘却的时候，阿基米德还会受到缅怀，因为语言总会消亡，而数学思想却是永存的。”

如果再组织一个内容更广泛的“数学史菁华录”连续讲座，阿基米德的名字就很可能多次出现。例如，是阿基米德开创了用实验方法计算π的漫长历史，是阿基米德写出了第一篇有意义的数学物理方面的文章。在稍后一讲里，我们还要回来讲阿基米德的《论球与圆柱》卷Ⅱ，结合解三次方程问题给

① 公元前五世纪古希腊悲剧诗人。—译注

出一个评述。

练习

9·1　流体静力学第一定律就是阿基米德的著作《论浮体》卷Ⅰ命题7。

(*a*)　设重量为w磅的王冠由w_1磅金子和w_2磅银子制成，假定w磅纯金在水中称减轻f_1磅，w磅纯银在水中称减轻f_2磅，王冠在水中称减轻f磅。证明

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{f_2-f}{f-f_1}$$

(*b*)　假设问题(*a*)中的王冠浸没于水中时排出v立方英寸的水，与王冠重量相同的两块纯金和纯银浸没于水中时则分别排出v_1和v_2立方英寸的水。证明

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{v_2-v}{v-v_1}$$

9·2　利用阿基米德《论球与圆柱》卷Ⅰ命题33和34的那个推论求出半径为r的球的表面积与体积的熟知公式。

9·3　定义**球冠**、**球台**和**球锥**。

9·4　已知：**球冠面积等于大圆周长乘以球冠高度**。利用这个定理推出球面积的熟知公式，并证明下述

定理：**球冠面积等于一个圆的面积，该圆的半径是生成弧①所对的弦。**

9·5 已知：球锥体积是底②面积与球半径之积的三分之一。试证明下列结果：

(*a*) 从半径为r的球上截出一个球冠，其高为h，底圆半径为a，则其体积为

$$V=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)=\pi h\left(\frac{3a^2+h^2}{6}\right).$$

(*b*) 设球台高度为h，两底圆半径为a和b，则其体积为

$$V=\frac{\pi h}{6}\left(3a^2+3b^2+h^2\right).$$

(*c*) 问题(*b*)中的球台相当于一个球与两个圆柱之和：球的半径为$h/2$，两个圆柱的高都是$h/2$，底半径各为a与b。

9·6 图28表示以AC为弦的抛物线弓形，CF是抛物线在C处的切线，AF平行于抛物线的轴，OPM也平行于抛物线的轴，K是FA的中点，$HK=KC$。取HC为杠杆或平衡杆，其支点在K。把OP置于H处，使其中心落在H，OM留在原处。

(*a*) 据阿基米德平衡法，利用$OM/OP=AC/AO$这一几何事实证明：抛物线弓形的面积等于三

① 球冠的生成弧是指从球冠极点到底圆的大圆弧。——译注
② 球锥的底是指球冠。——译注

图28

角形AFC的面积的三分之一。

(b) 设U是AC的中点，过U平行于抛物线轴的直线与抛物线交于V，与FC交于W。根据问题(a)，利用V在HC上这一几何事实证明：抛物线弓形的面积是三角形AVC的面积的三分之四。

阿基米德在《方法》中告诉我们，他就是利用问题(a)和(b)的步骤而发现问题(b)中那个结果的。可是，他的数学良知使他认为，这样的步骤不能算是证明，所以他又在“求抛物线面积”这篇文章中利用尤多克萨斯穷举法提出了一个严格的证明。

9·7 设有两条曲线m和n，还有一点O. 假定我们可以在一把直尺上标出一个线段MN，然后调整直尺，使得直尺通过点O且与曲线m和n相交，m上的交点为M，n上的交点为N。这时沿着直尺画出的直线称为按“插入原理”画出的直线。如果我们可以使用插入原理，有时就能解决只用欧几里德作图工具无法解决的问题。利用插入原理证明下述

三等分任意角的作图法是正确的。

设AOB是已知圆的任何圆心角。过B画直线BCD与该圆交于另一点C，与AO的延长线交于D，使$CD=$圆半径OA。于是，角$ADB=\frac{1}{3}$(角AOB)。

三等分问题的这一解法是阿基米德的一个定理的推论。

9·8 利用**阿基米德螺旋线**可以巧妙地解决圆改方问题（即作一正方形，其面积等于已知圆的面积）。据传，阿基米德的确用过他的螺旋线来达到这一目的。我们可以用力学的术语定义这种螺旋线为点P的轨迹：这点沿一条射线匀速运动，而该射线又在平面上绕原点匀速旋转。如果我们取P与射线原点O重合时射线的位置OA作为极坐标架，那么OP与角AOP成比例，所以螺旋线的极坐标方程为$r=a\theta$，这里a是比例常数。

试说明如何利用阿基米德螺旋线来作一个正方形，其面积等于圆心为O半径为a的圆的面积。

9·9 说明如何利用阿基米德螺旋线来三等分（更一般地，多等分）任意角AOB。

9·10 阿拉伯学者认为下述“折弦定理”是阿基米德发现的。这个定理说，如图29所示，如果AB和BC组成圆内的折弦，$BC>AB$，并且M是弧ABC的中点，则M到BC上所引垂线的垂足F是折弦ABC

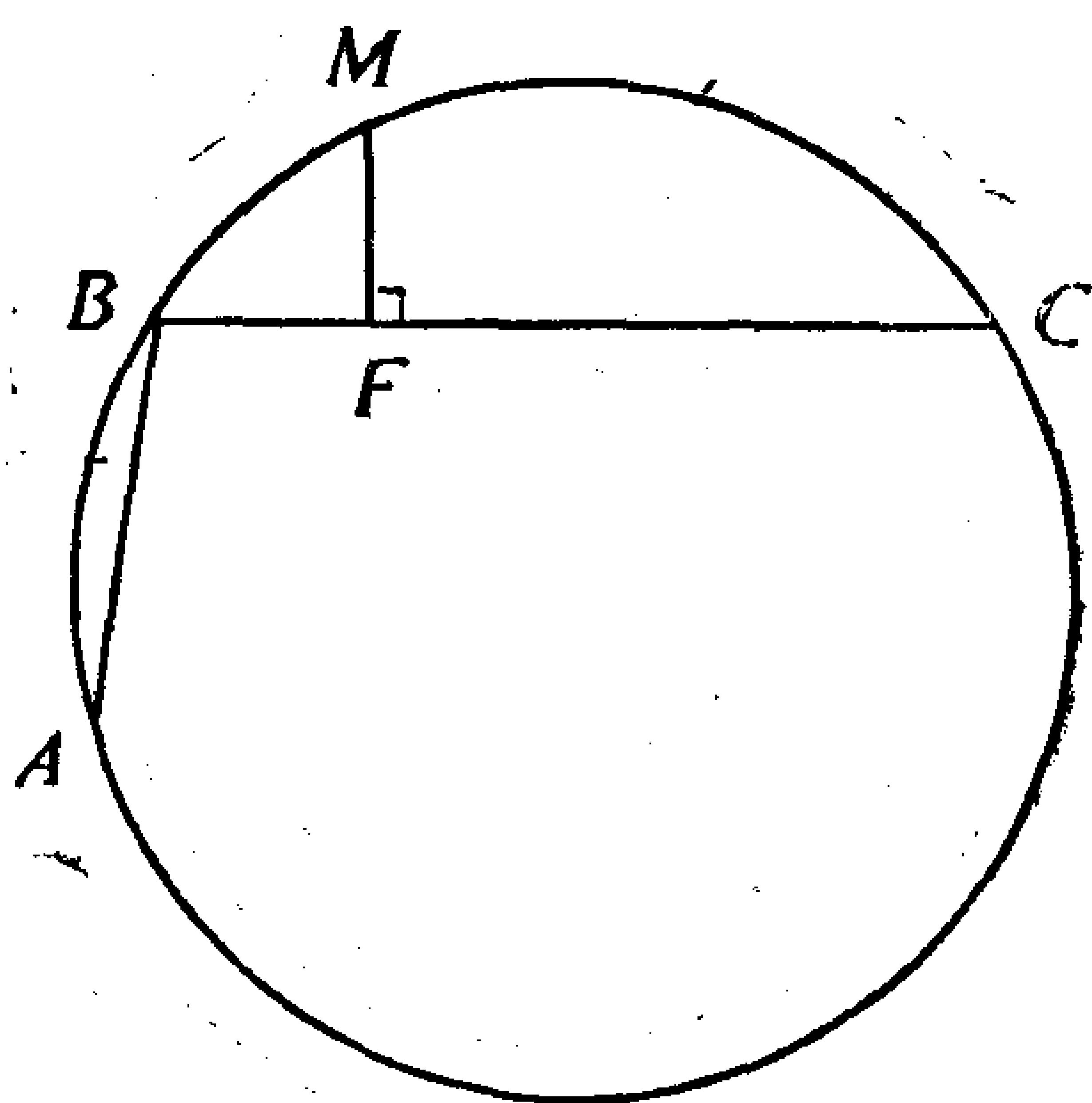


图29

的中点。

(a) 证明这个折弦定理。

(b) 设弧$MC=2x$，弧$BM=2y$，依次证明：$MC=2\sin x$, $BM=2\sin y$, $AB=2\sin(x-y)$, $FC=2\sin x\cos y$，$FB=2\sin y\cos x$。然后证明：折弦定理蕴涵恒等式$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x$。

(c) 利用折弦定理证明恒等式$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$。

进一步的读物

Dijksterhuis, E.J., *Archimedes,*

New York, Humanities Press, 1957.

Heath, T. L., *The Works of Archimedes*. New York, Cambridge University Press, 1912. Reprinted by Dover, New York.

十、来自天文学的推力

托勒玫编造的弦长表

（约在公元130年）

三角学开初是不引人注目的。就古希腊以前的时期而言，《莱恩德古书》（约在公元前1650年）里有些问题涉及正方形正棱锥底部二面角的余切；有一件巴比伦楔形文字的铭文，叫做“普利普顿322”*（公元前1900年至1600年），其主要内容是45°与30°之间十五个角度的正割数值表。如果对古代美索不达米亚地区的数学进一步深入研究，很可能对实用三角学的发展有重要的揭示。巴比伦的天文学家们积累了相当多的观察数据，我们也知道其中很多信息曾经传给希腊人。球面三角学的诞生正是由于早期的这种天文知识。

希腊天文学家中最早的一位是萨摩斯岛的埃锐斯塔克斯（约公元前310年至230年），据说，他曾用数学来研究天文学，第一个提出了太阳系日心

* 这是指哥伦比亚大学G.A.普利普顿考古收藏品中目录编号为322的收藏品。——原注

说*.他的著作全都没有流传下来，但据记载，在其短文《论日月之大小及距离》中，他用到了与下述事实等价的命题：

$$\frac{\sin a}{\sin b}<\frac{a}{b}<\frac{\tan a}{\tan b},$$

这里$0<b<a<\pi/2$.

我们知道的第二位古希腊杰出的数学天文学家是赫巴克斯，他生于小亚细亚的奈斯尔城，大约在公元前140年最负盛名。赫巴克斯在公元前146年曾对亚历山大港的春分点做过观测记录，但他最重要的天文观测是在著名的柔兹岛天文台进行的。赫巴克斯以其细致而精确的观测著称，公认为取得了下述业绩：确定平均太阴月，与现在认可的值相差在一秒以内；精确算出了黄赤交角；发现并估计出昼夜平分点的岁差。据说他还算出了月球视差，确定出月球的近地点，编了850个恒星的目录。他提倡用纬度和经度来确定地球表面的位置，他可能是第一个在希腊引入把圆分成360°的人，虽然我们对这些业绩的知识都是第二手的（因为赫巴克斯的著作几乎全都没有流传下来），但我们认为，赫巴克斯理所当然地知道有关天体的这些三角学的基本事实。

* 因此，埃锐斯塔克有时有“古代哥白尼”之称. ——原注

还有一个更直接、更重要的情况说明赫巴克斯与三角学的关系，就是四世纪亚历山大港的评论家塞恩认为，赫巴克斯编造过一份十二卷的**弦长表**。这份表已经湮不可考了，不过后来倒有一份表保存下来了，那是C·托勒玫（约85年—165年）* 编造的，据信是由赫巴克斯的表改编的，胪列出从0.5°到180°顺序相隔半度的所有圆心角的弦长：圆半径分成60等分，弦长则以这些等分为单位按六十进位表示。例如，用符号crdα表示圆心角α的弦长，则查到

$$\mathrm{crd}36° = 37^{p}4'55'',$$

意思是说，圆心角36°的弦长为半径的37/60（即37个小等分），加上一个等分的4/60，再加上一个等分的55/3600。从图30显然可见，弦长表相当于三角学上的正弦表，因为

$$\sin\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{\text{圆的直径}} = \frac{\mathrm{crd}2\alpha}{120}.$$

因此，托勒玫弦长表实际上给出了从0°到90°依次相隔四分之一度的诸角的正弦值。据载，赫巴克斯系统地使用过他的弦长表，他显然知道现在用来解球面直角三角形的若干公式的等价公式。

塞恩还提到亚历山大港的麦尼雷斯（约在公元

---

* 不要同以前埃及的托勒密王朝的任何国王相混。—原注（原书这两个人名是一样的，都作Ptolemy，但托勒玫应作Claudius Ptolemaeus。—译注。）

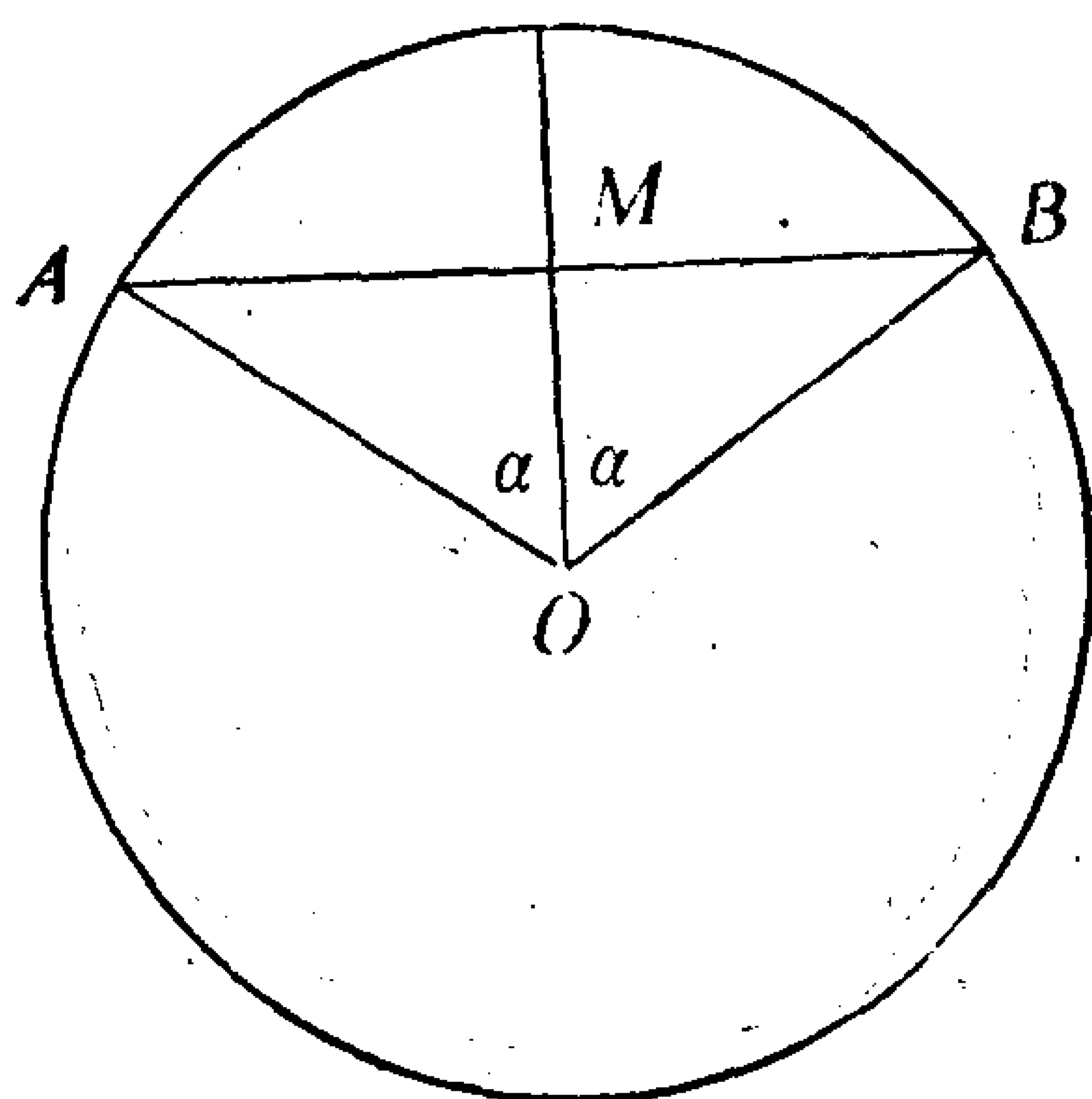


图30

100年）写过一部六卷的著作，论述圆内的弦，但是这部著作也同麦尼雷斯的其他种种著作一起湮没无闻了．幸好，麦尼雷斯的一部三卷的著作《球论》却用阿拉伯文保存下来了．这部著作对于希腊三角学的发展提供了很好的说明．

古希腊天文著作居然有这么多化为乌有，其原因在于托勒玫写了一部著作，使那些早期的著作黯然失色，终于声销迹灭．大约在公元150年，托勒玫写了他那出类拔萃的希腊文天文学巨著．这部极有影响的著作题为《数学体系》，以其材料完备、结构紧凑、论证优美而独步一时，所以后世的评论家为了有别于其他次要的天文学著作，就给它安上一个最高级形容词*magiste*，即是“最伟大的”．再到后来，阿拉伯翻译家又在前面加上了阿拉伯语的冠

词*al*，结果这部著作此后就一直称为*Almagest*①。这部著作共十三卷，在卷Ⅰ中，除了某些预备性的天文学材料外，就有上面提到的弦长表，同时还简要说明了该表如何来源于一个极有用的几何命题，即今称**托勒玫定理：圆内接四边形中，两条对角线之积等于两双对边之积之和**。

实用三角学如果不利用所谓的三角函数表，就不可能有很大的进步。因此，最早系统编制的一份可以应用的三角函数表，显然就是一件“数学史菁华”。本讲其余部分的目的是扼要介绍托勒玫如何编制他那非常有用的弦长表，也就是正弦表*。为了便于叙述和理解，我们将利用现代的代数记号，使用现代的十进位小数而不用古代的六十进位小数，分成几个小步骤详细推演。

1. 我们首先证明上述托勒玫定理。为此目的设$ABCD$（见图31）是圆内接简单四边形，E是对角线AC上的点，使得$\angle ABE=\angle DBC$。由相似三角形ABE和DBC可见，$AB/AE=DB/DC$，所以$(AB)(DC)=(DB)(AE)$。再由相似三角形ABD和EBC得到$AD/DB=EC/CB$，所以$(AD)(CB)$

---

① 即第八讲提到的《大综合论》，这个译名见《辞海》1521页，上海辞书出版社，1979.——译注

* 这个方法很可能早由赫巴克斯使用过了．“普利普顿322”中发现的非常简短的正割表，似乎是由一组基本的毕达哥拉斯三角形巧妙编成的，其可用性远不如托勒玫的表．——原注

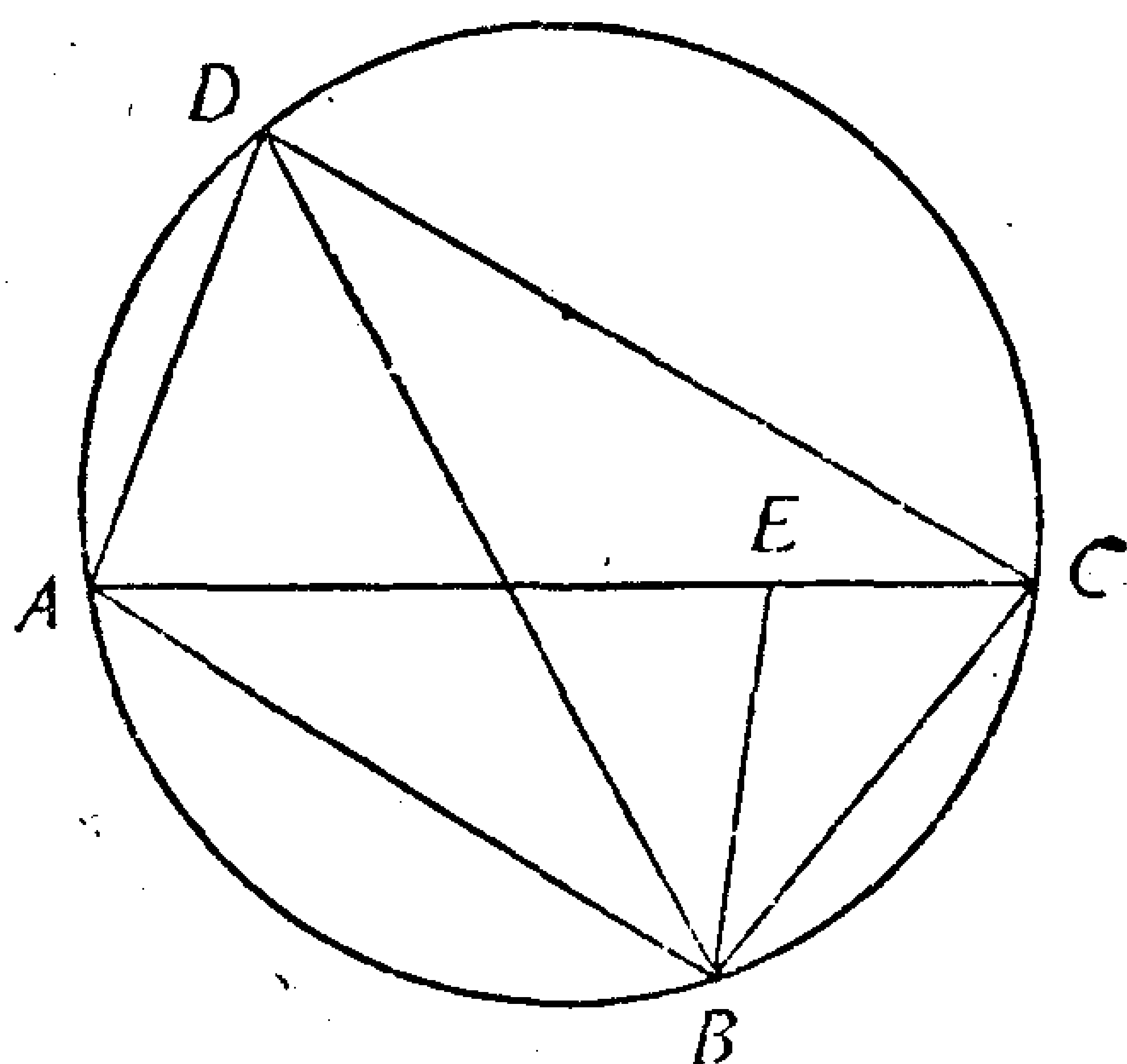


图31

$= (DB)(EC)$. 由此推出$(AB)(DC)$

$+(AD)(CB)=DB(AE+EC)=(DB)(AC)$。

定理证毕。

我们现在建立托勒玫定理的三个推论。

2. 推论1. 如果a和b是单位圆上两段弧的弦，则

$$s=(a/2)(4-b^2)^{1/2}+(b/2)(4-a^2)^{1/2}$$

是这两段弧之和的弦。

应用托勒玫定理于图32的四边形，其中AC是直径，$BC=a$，$CD=b$。

3. 推论2. 若a和b是单位圆上两段弧的弦，$a\geqslant b$，则

$$d=(a/2)(4-b^2)^{1/2}-(b/2)(4-a^2)^{1/2}$$

是这两段弧之差的弦。

应用托勒玫定理于图33的四边形，其中AB是

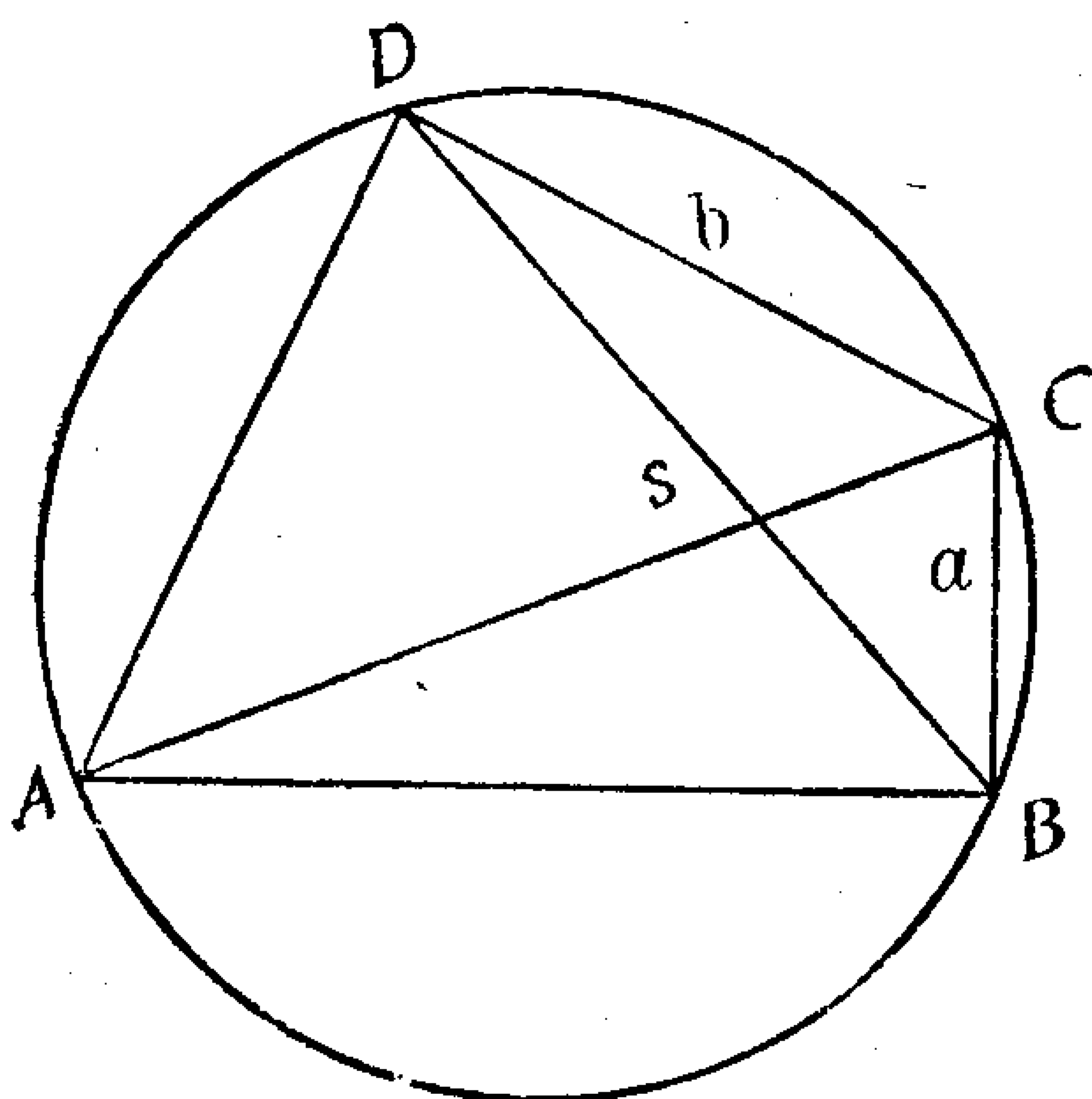


图32

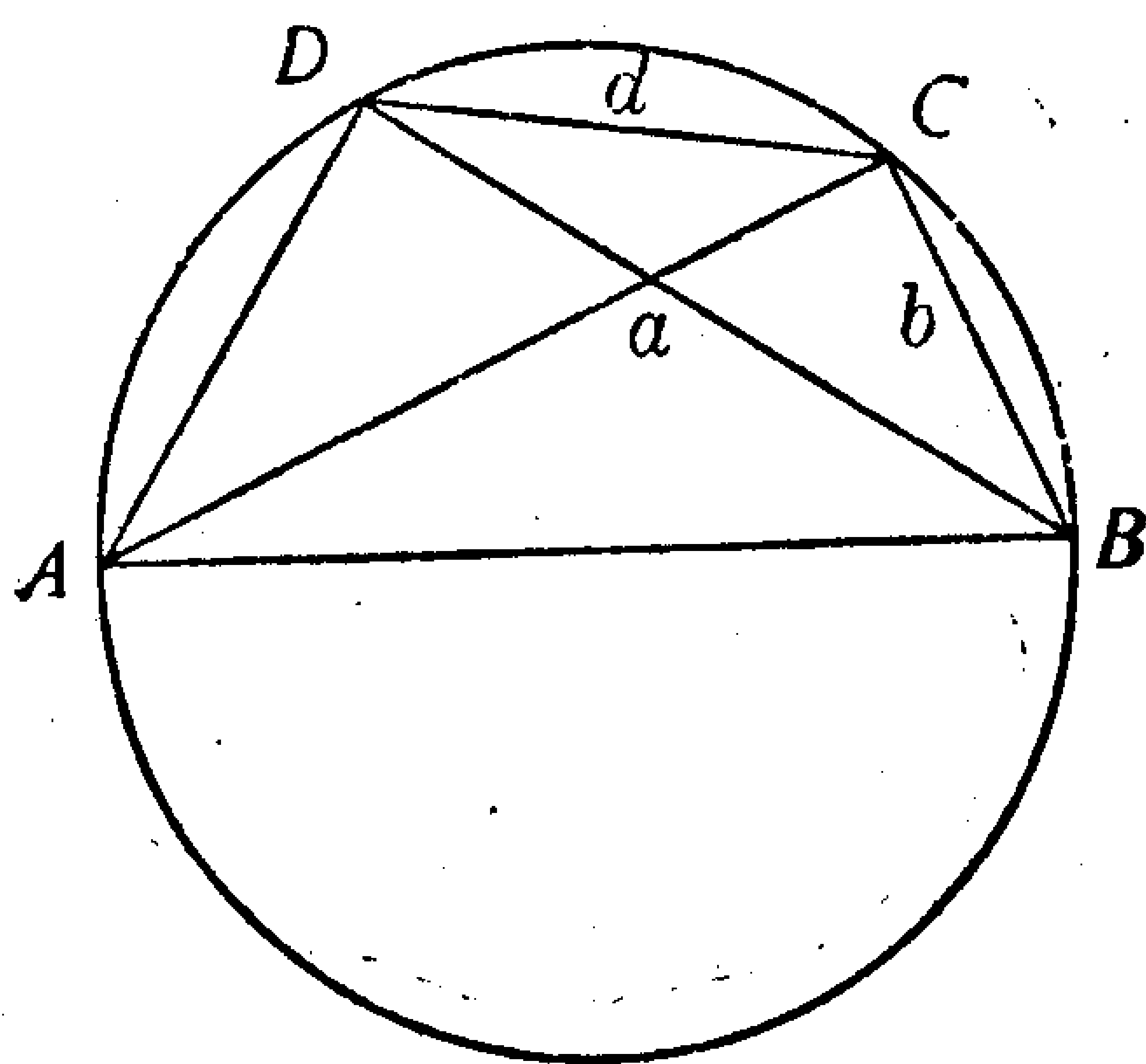


图33

直径，$BD=a$，$BC=b$。

4. 推论3. 如果t是单位圆一段劣弧的弦，则

$$h=[2-(4-t^2)^{1/2}]^{1/2}$$

是该弧之半的弦。

应用托勒玫定理于图34的四边形，其中AC是直径，$BD=t$，BD垂直于AC。我们得到

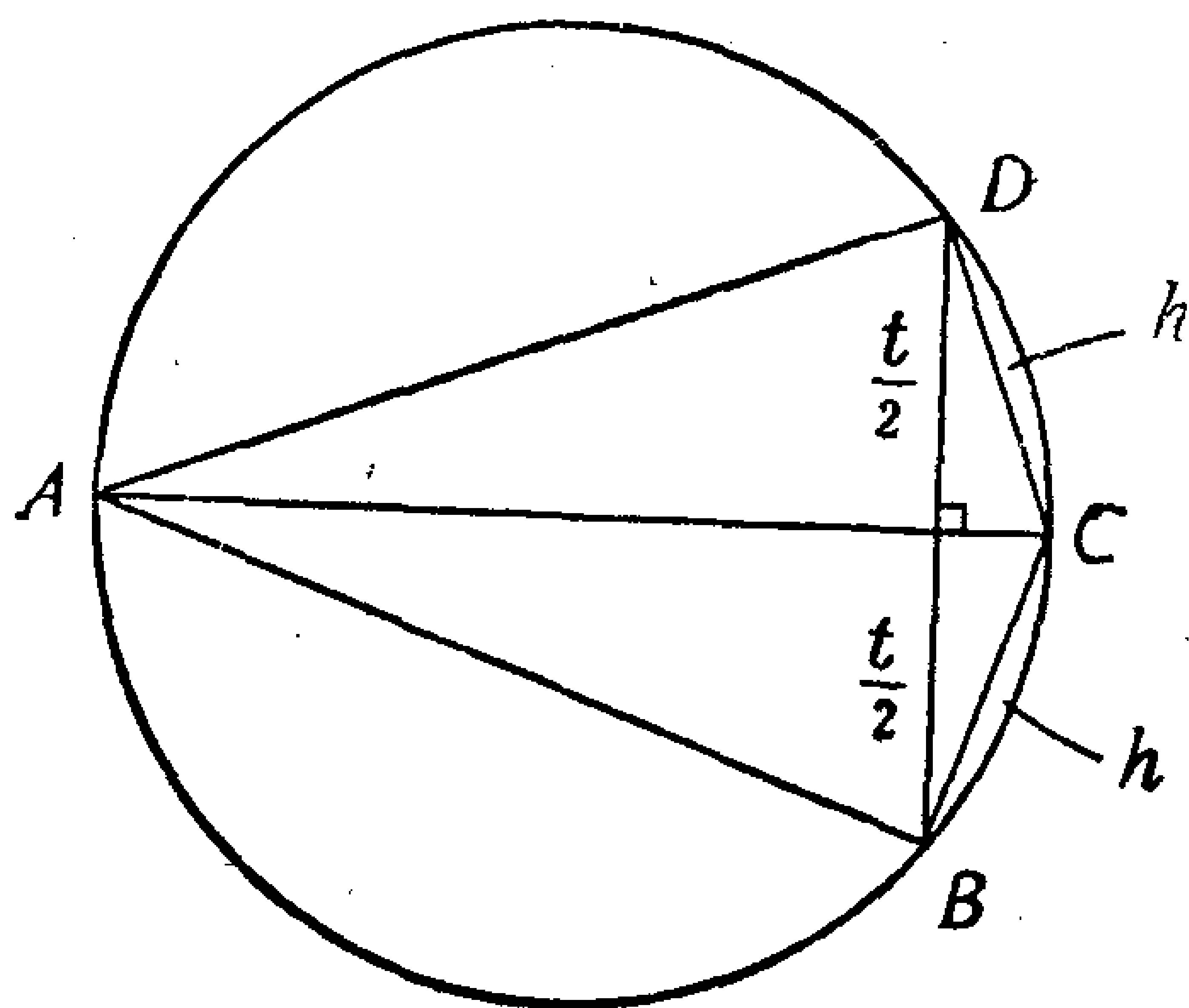


图34

$$2t=2h(4-h^2)^{1/2},$$

两端平方再移项得到

$$h^4-4h^2+t^2=0.$$

把这个方程作为h^2的二次方程求解，我们得到

$$h^2=2\pm(4-t^2)^{1/2}$$

由于h代表弦BD所对劣弧之半的弦，所以上式中应取负号。最后，取平方根得到

$$h=[2-(4-t^2)^{1/2}]^{1/2}.$$

5. 考虑一个等腰三角形AOB（见图35），其顶角$AOB=36°$，作$\angle BAO$的平分线AC。于是，从相似三角形AOB与BAC得到$AB/CB=OB/AB$。令$AB=x$，取$OB=1$，我们求得

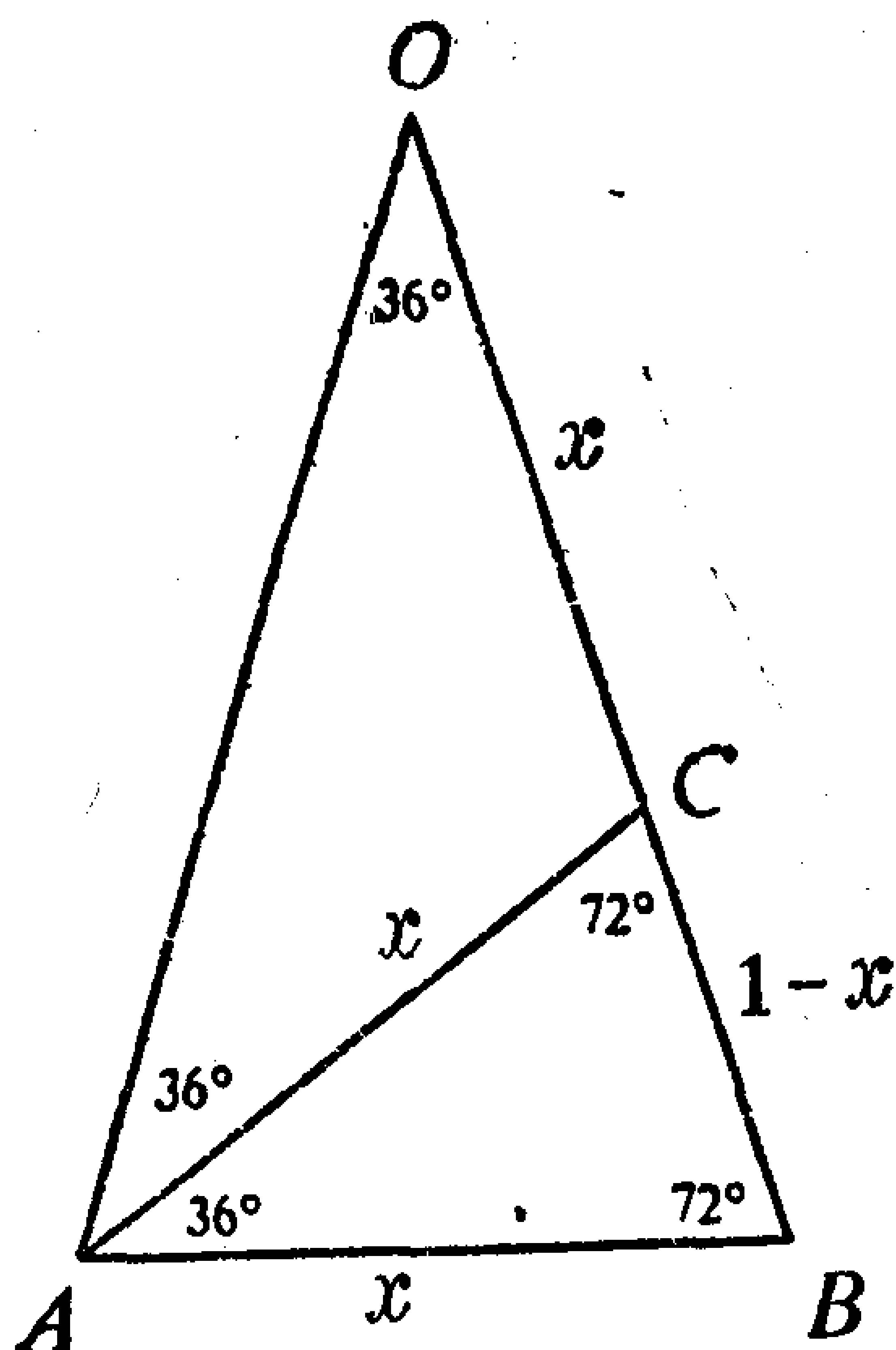


图35

$$x/(1-x)=1/x \quad 或 \quad x^2+x+1=0,$$

从而（精确到小数点后四位）

$$x=(\sqrt{5}-1)/2=0.6180.$$

可见在单位圆内，crd$36^\circ=0.6180$. *

6. 由于在单位圆内crd$60^\circ=1$，所以据上述推论2可见，在单位圆内

$$\text{crd}24^\circ=\text{crd}(60^\circ-36^\circ)=0.4158.$$

7. 据推论3现在可以依次算出单位圆内下列诸角的弦：12°，6°，3°，$90'$，$45'$，结果得到

---

* 这当然就是第五讲所说的黄金比值了. ——原注

$crd90' = 0.0262$，$crd45' = 0.0131$.

8. 本讲开头曾经指出，埃锐斯塔克斯知道与下述关系等价的命题：

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b}, \quad b < a < 90°,$$

由此可得

$$crd60'/crd45' < 60/45 = 4/3.$$

或

$$crd1° < (4/3)(0.0131) = 0.01747.$$

同理

$$crd90'/crd60' < 90/60 = 3/2,$$

或

$$crd1° > (2/3)(0.0262) = 0.01747.$$

从而，精确到小数点后四位，$crd1° = 0.0175$.

9. 据推论3现在可以求得$crd\frac{1}{2}°$.

10. 现在可以编制单位圆内依次相隔0.5°的弦长表了.

实用三角学后来的许多工作就是编制日益完善的三角函数表. 例如，十世纪的穆斯林数学家阿布尔维发(940—998)计算了相隔15′的正弦表和正切表，后来维也纳数学家G·冯培尔巴赫(1423-1461)

计算过正弦表，德国数学家J·密勒*（1436-1476）计算过正切表。十六世纪首屈一指的德国数学天文学家G·J·饶提库斯（1514-1576），花费十二年用租来的计算机编制了两份三角函数表，非常出色，今天仍然有用：一份是所有六个三角函数的十位数表，角度各相隔10″；另一份是十五位数的正弦表，角度各相隔10″，附有第一、第二和第三差值。有趣的是，袖珍计算器的普及已使这些数表成为附赘悬疣，所以著名的《CRC数学用表手册》的数学咨询委员会有一次几乎表决要从《手册》第五版中删掉三角函数表①。

我们最后对三角函数现有名称的意义稍加说明。如果考虑单位圆的圆心角，那么由三角函数的几何解释可见，除了**正弦**以外②，意思都是清楚的。例如，如图36所示，如果圆的半径是一单位，则tanα和secα就由切线线段CD和割线线段OD量度，当然，**余切**不过就是指“余角的正切”，**余割**就是“余角的正割”。正切、余切、正割、余割还有种种别的名称，目前这些名称是十六世纪末才出现的。

正弦一词的来源比较奥妙。印度数学家厄里亚

* 更熟知的名字是锐宙蒙塔纳斯，这是他的出生地哥尼斯堡的拉丁文意译（国王之山）。—原注

① 截至1982年的26版仍保留了三角函数表。——译注

② 余弦作为余角的正弦，当然也是例外。——译注

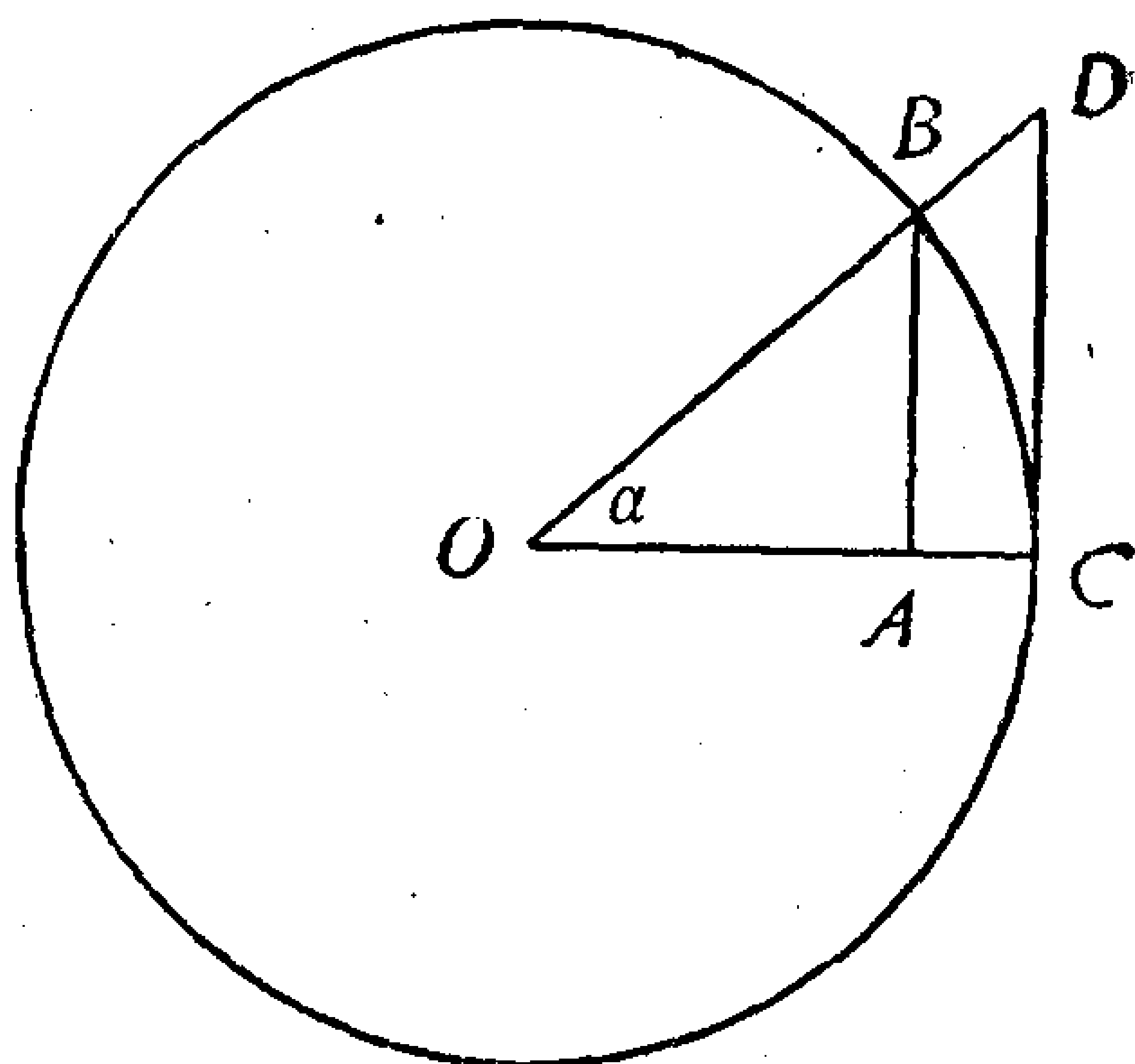


图36

巴达长老（约475年—约550年）称之为ardhâ-jyā（“半弦），也称为jyā-ardhâ（“弦半），后来又把这个词简写为jyā（“弦”）。阿拉伯人从jyā音译派生出jîba，这个词按照阿拉伯语略去元音的习惯被写成jb。由于jîba这个词除了学术上的意义以外在阿拉伯语里毫无意义，所以后来的作者，他们懂阿拉伯语而不懂梵文，一碰到jb，只知道是没有意义的jîba的缩写，就把它换成了jaib，而这个词刚好包含了同一些字母，却是一个地地道道的阿拉伯词，意思是“海滩”。再到后来，克里蒙纳的格拉尔多（约在1150年）从阿拉伯文译为拉丁文时，又把阿拉伯文的jaib换成了相应的拉丁词sinus，由此出现了我们现在的词sine。

练习

10·1　据函数$\sin x$和$\tan x$的图形证明：当x从0增大至$\pi/2$时，$\sin x/x$下降而$\tan x/x$上升，由此证明不等式

$$\frac{\sin a}{\sin b}<\frac{a}{b}<\frac{\tan a}{\tan b},$$

其中$0<b<a<\pi/2$。

10·2　证明：讲演正文中的推论1，2，3分别等价于下列三角恒等式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$

$\sin(\theta/2)=[(1-\cos\theta)/2]^{1/2},$

其中$0<\alpha,\ \beta,\ \theta/2<\pi/2$。

10·3　证明托勒玫定理的下列推论：

(*a*) 如果P是等边三角形ABC的外接圆弧AB上的点，则$PC=PA+PB$。

(*b*) 如果P是正方形$ABCD$外接圆弧AB上的点，则$(PA+PC)PC=(PB+PD)PD$。

(*c*) 如果P是正五边形$ABCDE$外接圆弧AB上的点，则$PC+PE=PA+PB+PD$。

(*d*) 如果P是正六边形$ABCDEF$外接圆弧AB上的点，则$PD+PE=PA+PB+PC+PF$。

10·4·三角形一边所在直线上的点如果不是该三角形的顶点，则称为该三角形这条边的**麦尼雷斯点**。试证明下列一连串的定理，其中所有的线段和角都是有向线段和有向角：

(a) **麦尼雷斯定理**．三角形ABC的边BC，CA，AB的三个麦尼雷斯点E，D，F共线的充要条件是

$$\left(\frac{BD}{DC}\right)\left(\frac{CE}{EA}\right)\left(\frac{AF}{FB}\right)=-1.$$

(b) 如果把三角形BOC的顶点联结到直线BC上的一点D（不是B或C），则

$$\frac{BD}{DC}=\frac{OB\sin\angle BOD}{OC\sin\angle DOC}.$$

(c) 设D，E，F是三角形ABC的边BC，CA，AB的麦尼雷斯点，O是空间中不在三角形ABC平面上的点，则D，E，F三点共线的充要条件是

$$\left(\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle DOC}\right)\left(\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle EOA}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle FOB}\right)=-1.$$

(d) 设D'，E'，F'是球面三角形$A'B'C'$的边$B'C'$，$C'A'$，$A'B'$的三个麦尼雷斯点，则D'，E'，F'位于球面一条大圆上的充要条件是

$$\left(\frac{\sin\overset{\frown}{B'D'}}{\sin\overset{\frown}{D'C'}}\right)\left(\frac{\sin\overset{\frown}{C'E'}}{\sin\overset{\frown}{E'A'}}\right)\left(\frac{\sin\overset{\frown}{A'F'}}{\sin\overset{\frown}{F'B'}}\right)=-1.$$

(这是麦尼雷斯在其《球论》中用过的麦尼雷斯球面定理。)

10·5 证明下列一连串定理：

(a) 三角形两边之积等于第三边上的高与外接圆直径之积。

(b) 设$ABCD$是直径为t的圆的内接四边形。边AB，BC，CD，DA之长记为a，b，c，d；对角线BD，AC之长记为m,n；两条对角线中任何一条与另一条上的垂线间的夹角记为θ。于是

$$mt\cos\theta = ab + cd,\quad nt\cos\theta = ad + bc.$$

(c) 在上面的四边形中有

$$m^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc},$$

$$n^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

(d) 在上面的四边形中，如果对角线互相垂直，则有

$$t^2 = \frac{(ad+bc)(ab+cd)}{ac+bd}.$$

(e) **托勒玫第二定理**：在上面的四边形中有

$$\frac{n}{m} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

我们这里再提出托勒玫定理的一个扩充以及一个非常美妙的推广，可能会使读者心慕手追。

托勒玫定理的扩充·在凸四边形$ABCD$中有

$$(BC)(AD)+(CD)(AB)\geqslant(BD)(AC),$$

等式成立的充要条件是：该四边形是圆内接四边形·

托勒玫定理的推广．设$T_1T_2T_3T_4$是圆C的内接凸四边形，$C_1C_2C_3C_4$是四个圆，分别在T_1,T_2,T_3,T_4处与圆C外切，于是

$$t_{12}t_{34}+t_{23}t_{41}=t_{13}t_{24},$$

这里t_{ij}是圆C_i与C_j的外公切线之长。〔这是J.卡瑟(1820-1891)的一个更一般的定理的特例。〕

进一步的读物

Aaboe, Asgee, *Episodes from the Early History of Mathematics* (New Mathematical Library, No. 13). New York: Random House and L.W. Singer, 1964. (The New Mathematical Library became a publication series of the Mathematical Association of America, Washington, D.C., in 1975.)

Heath, T.L., *History of Greek Mathematics*, 2vols. New York: Oxford University Press, 1931.

十一、第一位数论大师

刁番图及其《算术》

（约在公元250年）

数的研究有两个方面：一方面是探索它们之间的关系，另方一面则是创造数值计算的技术。对于古希腊人，前者叫做**算术**，后者则称为**计算技术**。这种分类法贯穿了整个中世纪，一直延续到十五世纪末，那时才出现了以**算术**这个统一名称来论述这两方面数值工作的课本。值得注意的是，今天，**算术**这个词，在欧洲大陆的含义与原来一样，而在英国和美国其通常意义则是古代**计算技术**的同义词，这两个国家中对数值研究的理论方面则赋予一个说明性的名称：**数论**。

一般认为，数论的发展是毕达哥拉斯及其门人率先走出了头几步，起了推动作用，这是与“毕达哥拉斯哥老会”奉行的正整数左右宇宙的哲学相辅相成的。他们的工作大部分成为后世数学神秘主义的基础，例如，公元320年左右的一位有影响的新

柏拉图主义①哲学家艾阿姆布里克斯就把**互亲数**或**相好数**的发现归功于毕达哥拉斯。两个正整数称为**互亲数**，如果每一个都是另一个全体真因子*之和，例如，毕达哥拉斯就发现284与220这一对数是互亲数，因为220的真因子是1，2，4，5，10，11，20，22，44，55及110，其和为284，而284的真因子是1，2，4，71及142，其和为220。这一对数带有一种神秘的色彩，后来有一个迷信说法是：两个人如果佩有写上这两个数字的护符，他们之间就会保持完美的友谊。于是，数字便开始在魔术、巫术、占星术、卜卦算命中发挥重要作用。

在发现最初的这一对互亲数284与220以后，一直没有找到新的互亲数，直到1636年法国数论大师P.de费马才宣布17296与18416是另一对互亲数。两年以后，法国数学家兼哲学家R·笛卡尔又给出了第三对互亲数。瑞士数学家L·欧拉对互亲数进行了系统的搜索，于1747年列出了有30对互亲数的表，后来又增加到60多对。再到后来，1866年一个十六岁的意大利孩子N·帕格尼尼②才发现了被漏掉的一

① 把柏拉图思想染上神秘主义色彩的一种哲学流派，三世纪时在亚历山大港兴起，后来盛行于古罗马，直到六世纪。——译注

* 正整数n的真因子是指除n本身外n的所有正整数因子，注意，1是n的真因子。真因子还有一个稍微过时的同义词，叫做**整除部分**。—原注

② 与意大利著名小提琴家N．帕格尼尼（1782—1840）同名同姓。——译注

对相当小的互亲数1184与1210，这是互亲数历史上的一桩怪事。现在知道的互亲数已经有1000对以上了。

互亲数的概念近代有某些推广。例如，三个或三个以上的数组成的循环序列，如果其中每一个数的真因子之和都等于下一个数，则称为**交好数串**。数字在百万以下的交好数串现在只知道两个，其中一个有五“节”，头一个数是12496（这是法国人P·普勒发现的）。另一个有28节，头一个数是14316*。正好有三节的交好数串叫做**数垒**，现在还不曾发现任何一个数垒。

还有一些数，其特殊性质也曾用于神秘的数字占卜，叫做**完美数、短缺数和盈余数**，一般都认为是毕达哥拉斯学派发现的。设N表示正整数n的真因子之和，于是，按照$N=n$，$N<n$或$N>n$而称n为**完美数，短缺数或盈余数**。例如，6是完美数（真因子为1，2，3），8是短缺数（真因子为1，2，4），12为盈余数（真因子为1，2，3，4，6）。

截至1952年，只知道12个完美数，全都是偶数，头三个是6，28和496。欧几里德《几何原本》卷Ⅸ最后一个命题是：**如果2^n-1是素数，******则**$2^{n-1}(2^n-1)$

---

*）还知道一些四节交好数串，就涉及百万以上的数了。—原注

**）素数是大于1的正整数，除了自身及1外没有其他正整数因子。大于1的整数如果不是素数，则称为合成数。例如7是素数而12则是合成数。——原注

是完美数，欧几里德的这个公式给出的完美数都是偶数，欧拉曾经证明：任何偶完美数一定具有这种形状。是否存在奇完美数的问题是数论上一个著名的未得解决的问题；已知：奇完美数不小于10^{100}。

1952年，利用*SWAC*数字计算机又发现了五个完美数，相当于欧几里德公式中的$n=521$，607，1279，2203，2281。1957年，利用瑞典计算机*BESK*发现了另一个完美数，相当于$n=3217$。1961年，用*IBM*7090计算机找到另外两个完美数，相当于$n=$4253和4423。当$n<5000$时，没有其他的偶完美数了。现在已经发现$n=9689$，9941，11213，19937，21701，23209和44497也都产生完美数，从而使已知完美数总共达到27个。

近代数学家对完美数的概念进行了某些推广。如果用$\sigma(n)$表示n的**所有**因子（包括n本身）之和，则n为完美数的充要条件是$\sigma(n)=2n$。一般而言，如果我们有$\sigma(n)=kn$，这里k是自然数，则n叫做**k倍完美数**。例如，可以证明120和672是三倍完美数。现在还不知道是否存在无限多个多倍完美数，更不用说只是完美数了；也不知道是否存在多倍奇完美数。1944年提出了**过剩数**的概念：自然数n称为**过剩数**，如果对所有的$k<n$有$\sigma(n)/n>\sigma(k)/k$。已知：过剩数有无限多个。后来又引进了一些与完美数、短缺数、盈余数有关的数，即是**实用数**、**几乎完美**

数、**半完美数**以及**怪数**。我们提到这些概念只是为了说明古代的数值工作如何激发出某些有关的现代研究。

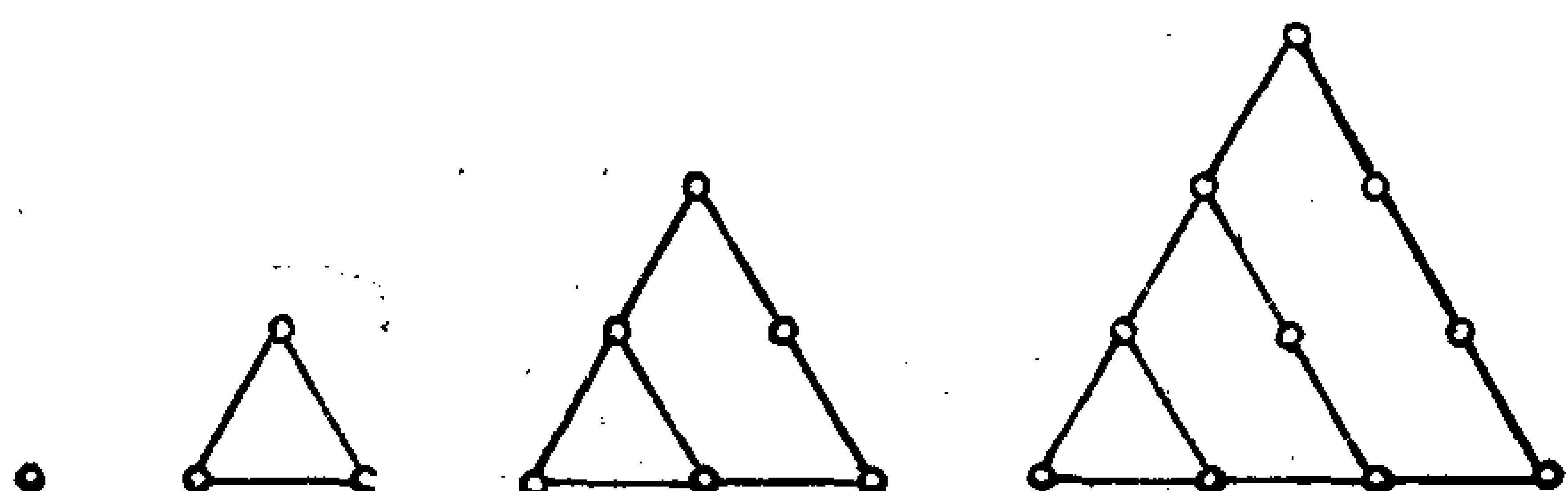


图37

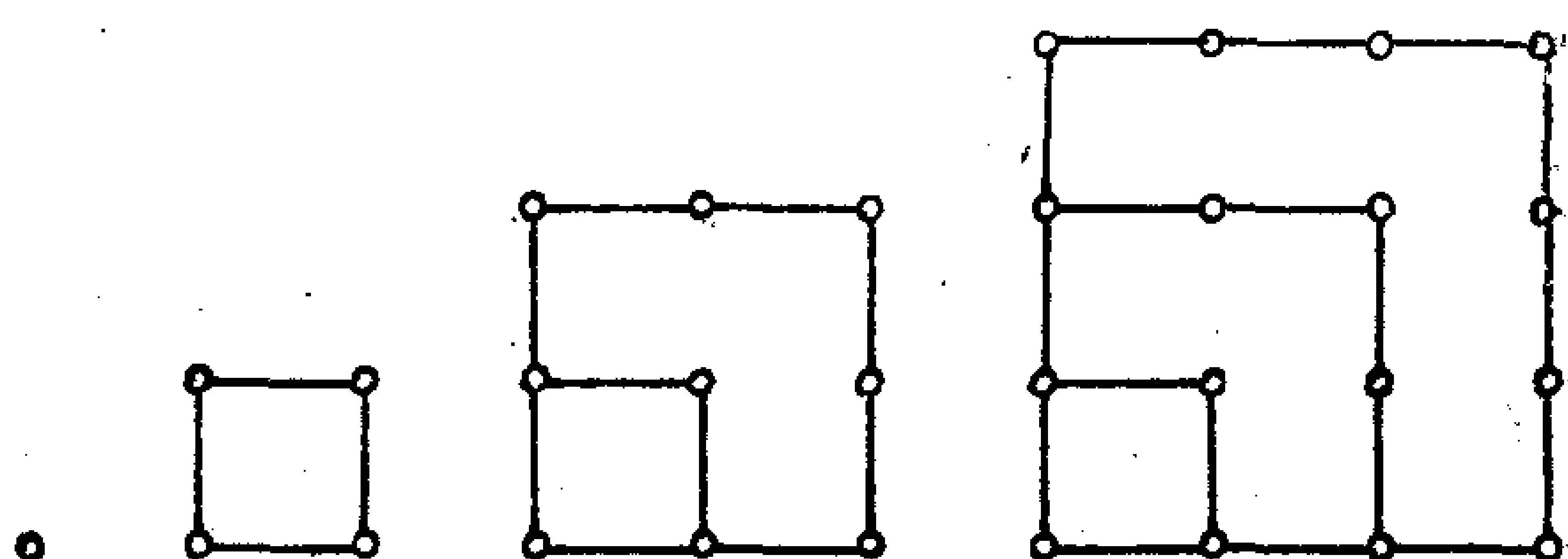


图38

尽管我们没有绝对把握说，互亲数、完美数、短缺数以及盈余数都是起源于毕达哥拉斯学派，但所谓的**多边形数**却是毕达哥拉斯哥老会的早期成员提出的，这一点看来是毫无疑问的。这些数可以视为某些几何构形中特殊点的个数，代表了几何与算术之间的一种联系。图37、38和39说明了**三角形数**、**正方形数**、**五边形数**这些几何名称的由来。多边形数有很多美妙的定理，可以利用这些数的图形表示加以简单证明。例如，考虑

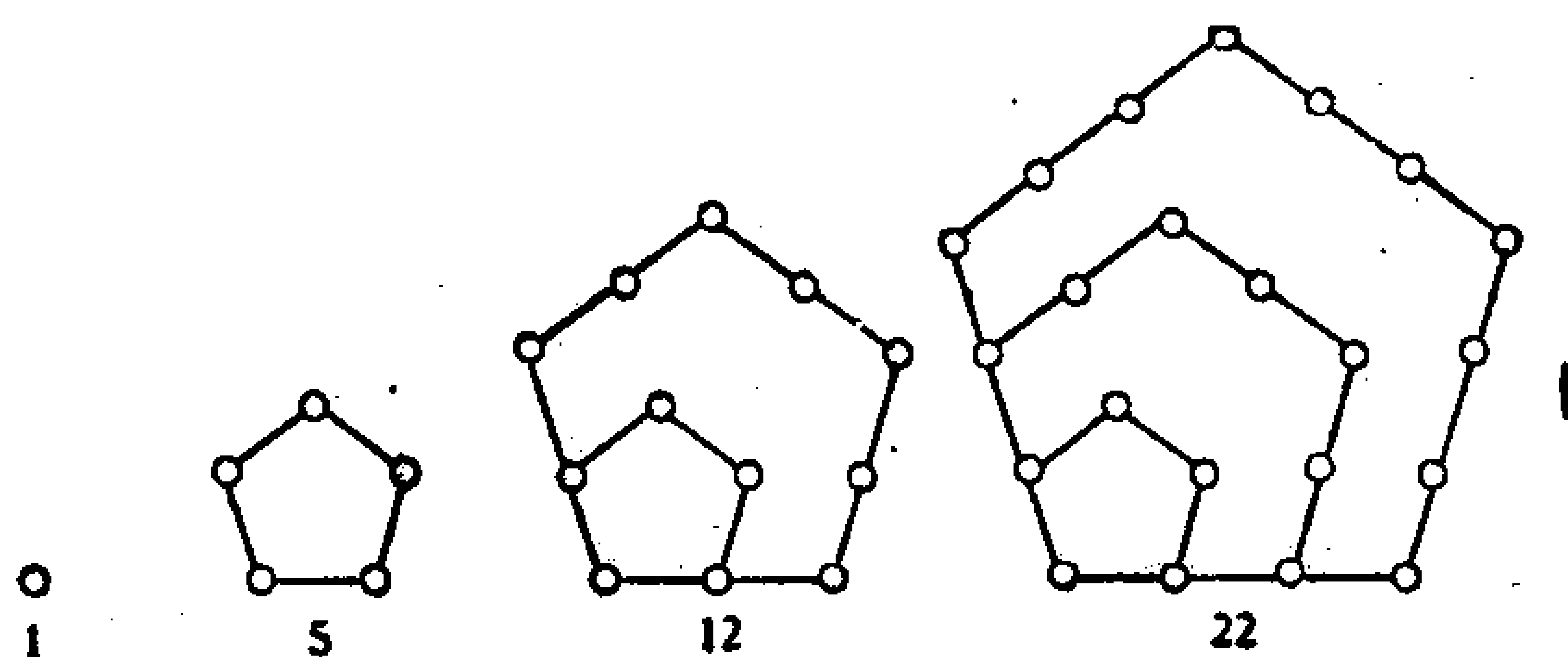


图39

1. **任何正方形数都是两个相继的三角形数之和**（见图40）.

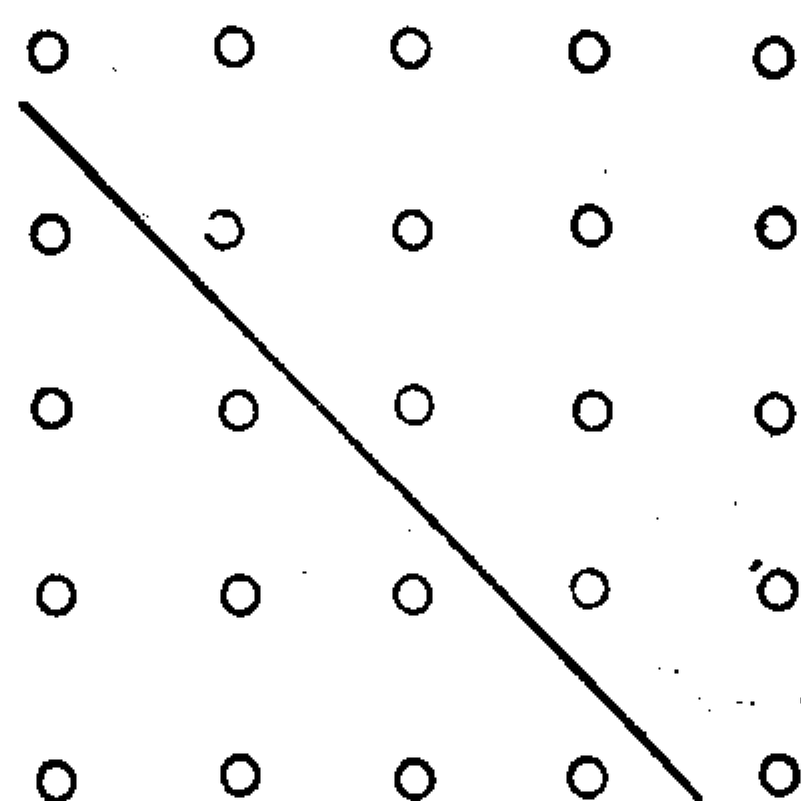


图40

2. **第n个五边形数等于n加上三倍的第n－1个三角形数**.（见图41）.

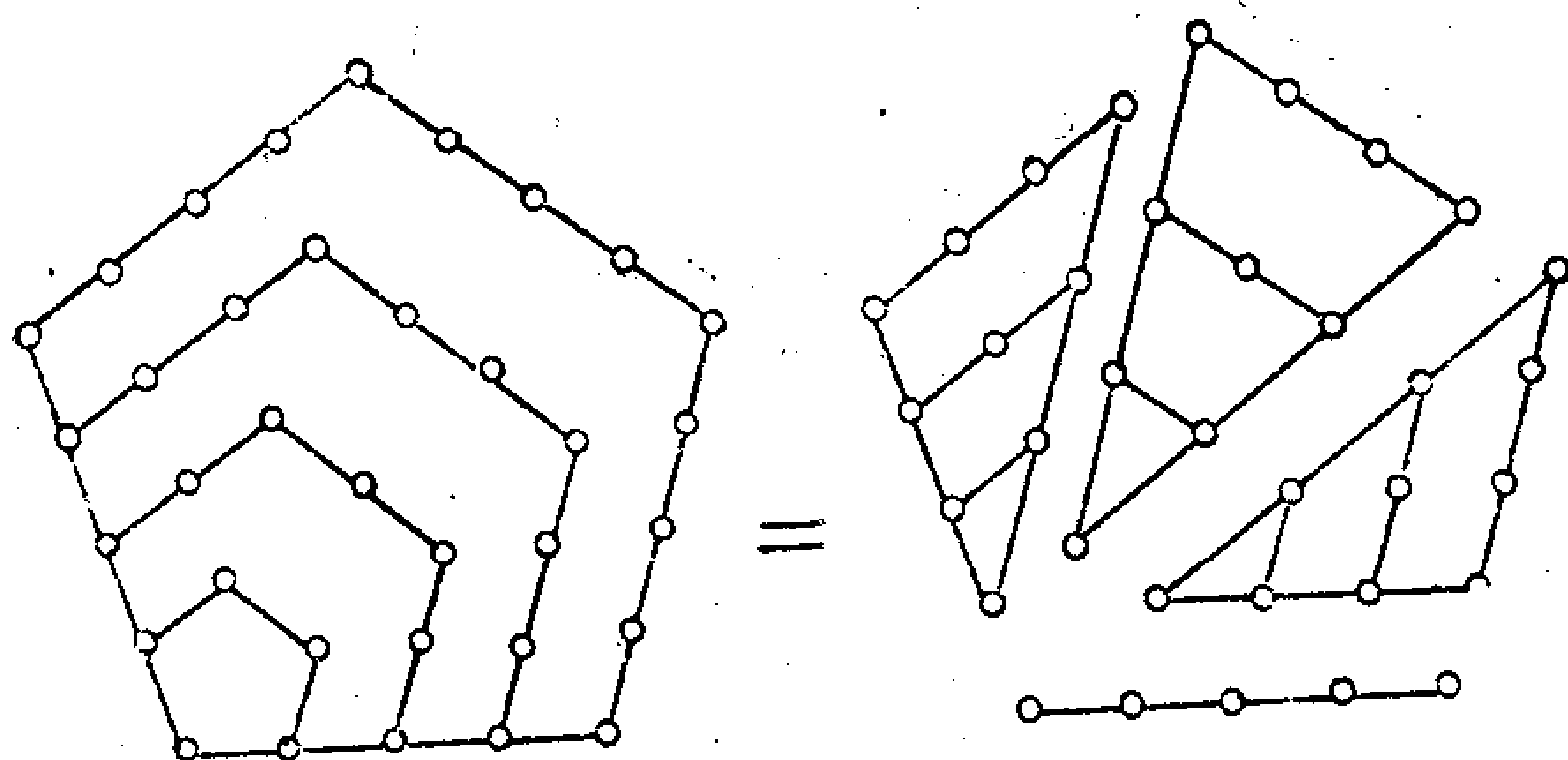


图41

3. 从1开始，任意多个相继奇数之和都是一个正方形数（见图42）。

这些定理当然也可以用纯代数方法证明，不过多边形数还有一些更深刻的性质，要避免代数方法的处理却不是轻而易举的。

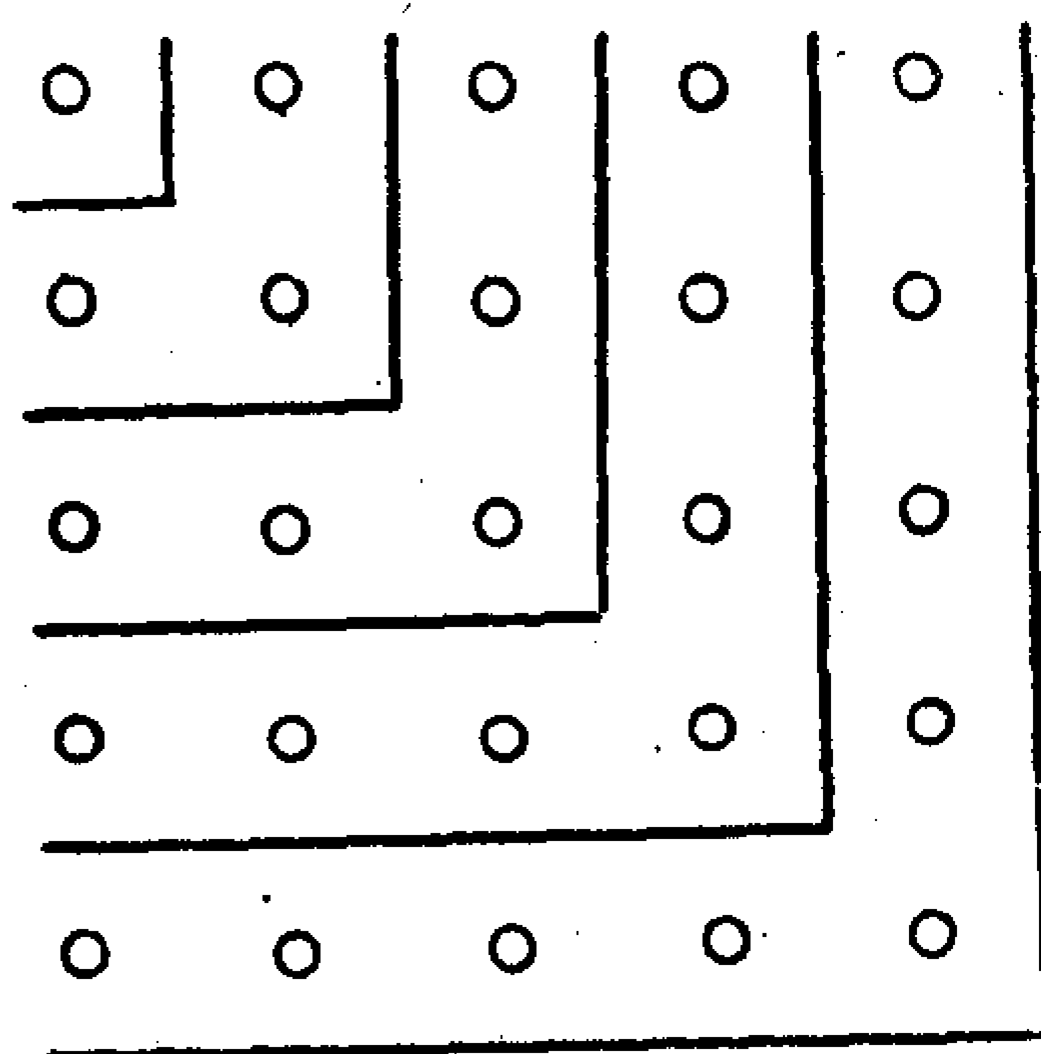


图42

素数，作为由乘法派生出所有其他整数的基本构件，其历史源远流长，从古希腊时代一直持续至今。欧几里德在其《几何原本》卷Ⅸ命题20中证明：素数有无限多个。这个定理有一个绝妙的推广，是P.G.L.狄里希利（1805—1859）建立的，他成功地证明：若a与b互素，则等差数列

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots$$

含有无限多个素数。这个结果的证明很不简单。

迄今发现的有关素数最令人惊叹的结果，大概要算所谓的**素数定理**了。设A_n表示小于正整数n的素数个数，素数定理说：当n无限增大时，

$$(A_n\log_e n)/n$$

趋于1.换言之，头n个正整数中素数的**密度**A_n/n近似于$1/\log_e n$，近似精度随n增大而改进。这个定理是

C.F.高斯（1777—1855）十五岁时检查一张大素数表而提出的猜想，后来分别由法国数学家J.阿达玛和比利时数学家C·J·*de la V*.普桑独立证明。

篇幅浩繁的因子表是研究素数的无价之宝。截至24000为止的所有数的因子表是J·H·按恩于1659年发表的，作为一本代数书的附录。1668年，英国的J.佩尔把这份表扩充到100 000.由于德国数学家J·H·兰贝尔特的呼吁，维也纳一位叫做A·费尔凯尔的中学教师算出了一份篇幅浩繁的因子表，头一卷列出了直到408,000的所有各数的因子，于1776年由奥地利皇室财库筹资出版，可惜时乖命蹇，该卷的订户极少，财库只好把几乎整个一版自行收回，用纸来造弹壳，在与土耳其人交战中派了用场。十九世纪，切尔纳克、伯克哈特、克锐尔、格赖式尔以及心算敏捷的达斯等人通力合作，编了一份因子表，囊括了直到一千万的各数，分十卷出版。可是，布拉格大学J·P·库里克（1773-1863）计算的因子表堪称出类拔萃，囊括了直到一亿的所有的数，这是他二十年惨淡经营的结果，不过仍然是一份未曾出版的手稿。最有用的因子表是美国数学家D·N·雷默尔（1867-1938）编的，这是一份编排巧妙的单卷本因子表，囊括了直到一千万的数。雷默尔曾经指出，库里克的表有错。

素数有许多没有解决的问题，足够写满一本专

门的小册子。例如，是否有无限多个形如n^2+1的素数？在n^2与$(n+1)^2$之间是否总有一个素数？自某点以后是否任何整数n都是一个平方数或者是一个素数与一个平方数之和？是否有无限多个**费马素数**，即形如$2^{2^n}+1$的素数？

作为受到古希腊人注意的另一种数组，我们可以举出**毕达哥拉斯三数组**，这是指正整数的三数组(a, b, c)，使得$a^2+b^2=c^2$。由此可见，a, b, c可以作为一个直角三角形的勾、股、弦之长，这种直角三角形也叫做**毕达哥拉斯三角形**。例如，（3，4，5）与（5，12，13）都是毕达哥拉斯三数组，给出3－4－5与5－12－13毕达哥拉斯三角形。现已发现，古巴比伦人早在公元前1600年就知道求毕达哥拉斯三数组的方法了。迄今已经对这种三数组开展了广泛的研究工作。

数学史上有一位出类拔萃的人物，很可能是数论领域中第一个真正的天才，他的一件著作曾对后世的欧洲数论家产生深远的影响，所以这件著作当然就可以算是一件"数学史菁华"。这个人就是亚历山大港的刁番图，所说的著作就是名著《算术》，虽然有些微弱的证据说明刁番图是公元第一世纪的人，但大多数史家倾向于认为他是第三世纪的人。关于他的个人生活，除了知道他曾在亚历山大港名噪一时之外，别的就不知道什么确切的事实了。

刁番图写过三种数学著作：《算术》，原著十三卷，现存其中六卷；《论多边形数》，现在只留下残篇断简：《不定命题论》，已经散佚无存。

《算术》是一部极富创造性的巨著，是用分析方法处理代数数论问题，表明作者是该领域内一位技艺纯熟的大师。这部著作曾经多人评注；锐宙蒙塔纳斯在1463年呼吁把现存的希腊文本译为拉丁文。这个艰巨的任务于1575年由宰兰德尔（这是海德堡大学教授W·霍尔兹曼所用的希腊名字）担负起来，他的译本很有价值，同时还附有重要的评注。宰兰德尔的译本后来得到法国人B·德梅兹里亚克的采用，他于1621年出版了第一版希腊原文与拉丁译文及注释的对照本。德梅兹里亚克译本的第二版是1670年出版的，可惜印刷粗糙，不过却具有特别重要的历史意义，因为这一版在正文中还编入了P·*de*费马的著名旁注①，从此数论的研究领域广为开拓。后来，《算术》的法文、德文和英文译本也相继出版。

《算术》的现存部分是讨论130来个各式各样的问题的解法，归结为一次或二次方程；还有一个

① 大约在1637年左右费马第一次阅读刁番图的《算术》，一般认为，这些拉丁文旁注就是当时写下的，后来由他的儿子S.de费马收集起来，作为新版《算术》译本的附录，题为“刁番图《算术》注释”，一共48条，其中第二条是写在《算术》译本卷Ⅱ问题8的页边空白处的，内容就是后来所谓的费马定理．——译注

很特别的三次方程的解法。第一卷论述一个未知数的确定方程，其他各卷则论述两个及三个未知数的二次不定方程。引人注目之处是缺乏一般的方法，而是针对各个具体问题的需要想出巧妙的数学解法。刁番图只承认正有理数解，而且往往满足于一个问题有一个解答即可，虽然可能存在很多不同的解答。

《算术》中也提出了一些深刻的数论定理。例如，我们发现其中有引用《不定命题论》而未予证明的一个结果：两个有理数立方之差也是两个有理数立方之和。这个问题后来得到F·维埃特、B·德梅兹里亚克以及P·de费马等人的研究。还有许多命题涉及把数表为两个、三个或四个平方之和的问题，这个研究领域后来由P·de费马、L·欧拉以及J·L·拉格朗日等人完成。现在把《算术》中的几个问题胪列出来也许是有意思的，这些问题都很有趣，有很多并不容易解决。必须记住："数"都是指"正有理数"。

卷Ⅰ问题17*：求四个数，已知其中任何三个之和，例如：22，24，27，20。

卷Ⅱ问题28：求两个平方数，使得其乘积加上其中任何一个后仍然是平方数。〔刁番图的答案是

---

* 问题的编号遵照T.L. Heath的《Diophantus of Alexandria》一书第二版中安排的次序。——原注

$(3/4)^2$，$(7/24)^2$。]

卷Ⅲ问题6：求三个数，使得其和为一平方数，而且其中任何两个之和也是平方数。（刁番图的答案是80，320，41。）

卷Ⅲ问题7：求三个数，成等差数列，并且任何两个之和都是平方数。（刁番图的答案是$120\frac{1}{2}$，$840\frac{1}{2}$，$1560\frac{1}{2}$。）

卷Ⅲ问题13：求三个数，使得任何两个之和加上第三个都是一个平方数。

卷Ⅲ问题15：求三个数，使得任何两个之积加上此二数之和都是一个平方数。

卷Ⅳ问题10：求两个数，使得其和等于其立方之和。（刁番图的答案是5/7，8/7。）

卷Ⅳ问题21：求三个数，成等比数列，并且任何两个之差都是一个平方数。（刁番图的答案是81/7，144/7，256/7。）

卷Ⅵ问题1：求毕达哥拉斯三角形，其弦减去勾与股都是一个立方数。（刁番图的答案是40，96，104。）

卷Ⅵ问题16：求毕达哥拉斯三角形，使得一个锐角平分线之长为有理数。

只要求有理数解的不定代数问题称为**刁番图问**

题，其实，这个术语的现代用法通常是只限于整数解。开创这种问题的人并不是刁番图，但刁番图的确掌握了处理这种问题的非凡才能，这样说才是恰如其分的。

作为本讲的结束语，让我们再就大概已是最著名的一个刁番图问题略说一二，《算术》卷Ⅱ问题8说："把已知平方数分为两个平方数之和。"费马在德梅兹里亚克《算术》译本中草草记下了叫人心慕手追的下述旁注："一个立方数不可能表为两个立方数之和，四次方也不可能表为两个四次方之和，一般说来，指数大于2的任何方幂不可能表为两个同样方幂之和。我对这个命题确实已经找到一个极妙的证明，但是这段空白太窄了，写不下来。"换句话说，费马声称已经证明：**不存在正整数x，y，z，n使得$x^n+y^n=z^n$，这里$n>2$**。这个命题就是所谓的**费马大"定理"**①。费马是否真的掌握了一个有效的证明，这大概永远都是一个谜了。自费马以来的许多最杰出的数学家都不遗余力地搞过这个问题，但对一般

① *Fermat's last theorem*，是我们通称的费马大定理，而原文实义是指"费马最后的定理"．H.M.Edwards在其《*Fermats' Last Theorem*》一书中指出：这个名称的由来不详；现在并不清楚费马是什么时候写下他的旁注的，但一般认为是他第一次阅读《算术》一书时写下的，当时距他逝世还有三十年，所以肯定不能算是最后的定理．Edwards接着提出一个新的解释，他认为这个名称的由来，很可能是费马提出的许多未获证明的命题中，这是最后一个仍然未获证明的命题．——译注

的命题迄今仍旧无可奈何。费马对$n=4$的情形在别处给了一个证明，欧拉对$n=3$的情形提出过一个证明（后来由别人加以完善）。大约在1825年，勒让德和狄里希利各自独立地对$n=5$的情形给出证明，1839年，拉梅对$n=7$证明了该定理。德国数学家E·库默尔（1810-1893）在研究此问题时曾获得重要进展。1843年，库默尔向狄里希利提交了一份他所谓的证明，狄里希利指出了一个论证错误，然后库默尔再接再厉继续搞这个问题，几年以后，他提出了高等代数中一个重要的有关课题，称为**理想理论**，从而对费马关系式的无解性得到某些很一般的条件。后来这个问题的几乎所有的重要进展都是以库默尔的研究为基础的。现在已经知道，对所有的$n<100,000$以及n的许多其他的特殊值，费马大"定理"都确实成立。1908年，德国数学家P。沃尔夫斯克尔把十万马克遗赠哥庭根科学院，作为对该"定理"的第一个完全证明的奖金，结果，沽名钓誉、唯利是图之辈提出的强词夺理的证明便泛滥成灾，而且，自此以后，这个问题也就有点象三等分任意角和圆改方问题一样，总是使一些业余爱好者如痴如醉、神魂颠倒。费马大"定理"作为发表过最大量错误证明的数学问题也是赫赫有名的。

练习

11·1 (a) 证明：N.帕格尼尼发现的数1184与1210是互亲数。

(b) T.柯拉 (826-901) 想出了求互亲数的下述规则：如果

$p=(3)(2^n)-1$，$q=(3)(2^{n-1})-1$，$r=(9)(2^{2n-1})-1$

是三个奇素数，则 $2^n pq$ 与 $2^n r$ 就是一对互亲数。试就 $n=2$ 及 $n=4$ 验证这条规则。

11·2 (a) 证明：欧几里德求完美数的公式中 n 必须是素数。

(b) 欧几里德公式提供的第四个完美数是什么？

(c) 证明：完美数的所有因子的倒数之和等于2。

11·3 (a) 证明：若 p 为素数，则 p^n 为短缺数。

(b) 求出小于100的21个盈余数。注意，这些数全都是偶数。说明 $945=3^3\cdot5\cdot7$ 是盈余数，这是第一个奇盈余数，这就表明盈余数并不都是偶数。

(c) 证明：盈余数或完美数的任何倍数都是盈余数。

11·4 (a) 列出头四个六边形数。

(b) 证明：第n个三角形数与第n个五边形数分别是

$T_n = n(n+1)/2$，$P_n = n(3n-1)/2$

(c) 对讲演中所述多边形数的三个定理提出代数证明。

(d) **长方形数**是列数比行数多一的矩阵的元素个数。从几何上与代数上证明：头n个正偶数之和是一个长方形数。

(e) 从几何上与代数上证明：任何长方形数都是一个三角形数的二倍。

(f) 从几何上与代数上证明：任何三角形数乘 8 再加 1 都是一个正方形数。

(g) 证明：任何偶完美数也是一个三角形数。

(h) 证明：m边形数序列由

$an^2 + bn$, $n = 1, 2, \cdots$

给出，其中a，b是一对固定的有理数。

(i) 对于$m = 7$求问题 (h) 中的a和b。

11·5 (a) 厄锐托瑟尼斯（约在公元前230年）提出了求小于已知数n的所有素数的办法，称为**筛法**，因而是算数史上的知名人物。从 3 开始，按顺序写下小于n的所有奇数，然后把这个序列中的合成数用下述办法筛掉：自 3 以下每隔两个数划掉一

个，然后再从下一个保留的数5开始每隔四个数划掉一个，接着再从下一个保留的数7开始每隔六个数划掉一个，然后再从下一个保留的数11开始每隔十个数划掉一个，继此以推。在这个过程中有些数可能要划掉不止一次。最后，所有保留的数再添上数2就构成小于n的素数表。

试据厄锐托瑟尼斯筛法求出500以下的所有素数。

(*b*) 证明：正整数p的任何素因子如果都大于平方不超过p的最大整数，则p为素数。由此可见，在厄锐托瑟尼斯筛法的消去过程中，只要我们达到一个素数$p>\sqrt{n}$，这个过程就不必再继续下去了，因为自p以后每隔$p-1$个数划掉一个数不过是重复划掉已经划掉的那些数罢了。例如，求小于500的所有素数时，如果我们已经进行到自19以下每隔十八数划掉一个，就不必再继续进行了，因为下一个素数23大于$\sqrt{500}$。

(*c*) 对于$n=500$，10^8及10^9计算$(A_n \log_e n)/n$。

(*d*) 证明：不论n有多大，总可以找到n个相继的合成数。

11·6 (*a*) 证明：对于任何正整数m，下面这三个数

$$2m,\ m^2-1,\ m^2+1$$

构成毕达哥拉斯三数组。据信，毕达哥拉斯学派是知道这个事实的。

(b) 证明：不存在边长为整数的等腰直角三角形

(c) 证明：毕达哥拉斯三数组中一个整数不可能是另外两个整数的比例中项。

(d)毕达哥拉斯三数组称为原始毕达哥拉斯三数组，如果其中三个数没有大于1的公因子。例如，(3,4,5)是原始三数组，而(6,8,10)则不是。可以证明：原始毕达哥拉斯三数组(a, b, c)具有参数表示

$$a=2uv,\quad b=u^2-v^2,\quad c=u^2+v^2,$$

其中u与v互素，一个是偶数，一个是奇数，并且$u>v$。例如，若$u=2$，$v=1$，则得到原始三数组$a=4$，$=3$，$c=5$，试求出16个原始毕达哥拉斯三数组(a, b, c)，使得b是偶数，$c<100$。再证明正好有100个不同的毕达哥拉斯三数组(a, b, c)，使得$c<100$。

(e) 证明：如果(a, $a+1$, c)是毕达哥拉斯三数组，则

$$(3a+2c+1,\quad 3a+2c+2,\quad 4a+3c+2)$$

也是毕达哥拉斯三数组。由此可见，如果给了一个毕达哥拉斯三数组，其勾股是相继的自然数，则可以由此得到另一个这样的毕达哥拉斯三数组，其各

边都更大。

(f) 从毕达哥拉斯三数组 (3,4,5) 出发，求出另外五个毕达哥拉斯三数组，其勾股是相继的自然数，而诸边则逐次增大。

(g) 证明：对于任何自然数$n>2$，存在一个毕达哥拉斯三数组，使得一条直角边等于n。

(h) 证明：只存在有限多个毕达哥拉斯三数组，具有已知的直角边a。

11.7. (a) 解《算术》卷Ⅰ问题17。

(b) 在直角三角形ABC中，C为直角顶点，AD平分角A。求AB，AD，AC，BD，DC之长的最小整数组，使得$DC:CA:AD=3:4:5$，由此求解《算术》卷Ⅵ问题16。

(c) 若m是任何正整数，

$$x=m^2,\ y=(m+1)^2, z=2(x+y+1),$$

证明：下列六个数

$$xy+x+y,\ yz+y+z,\ zx+z+x,$$

$$xy+z,\ yz+x,\ zx+y$$

全都是正方形数，由此说明这就解决了《算术》卷Ⅲ的问题13和15。

(d) 十九世纪的A。德摩根曾经兴高采烈地提出一个谜语："我在x^2年时曾经有x岁。"请说出德摩根的生年。

11·8 古印度人解决了求线性不定方程 $ax+$

$by=c$的所有整数解的问题，这里a，b，c都是整数。

(a) 若$ax+by=c$有整数解，证明：a与b的最大公约数是c的因子。（由此可见，不失一般性可以假设a与b互素。）

(b) 若 (x_1, y_1) 是$ax+by=c$的整数解，这里a与b互素，证明：所有的整数解可以表为 $x=x_1+mb$，$y=y_1-ma$，这里m是任意整数。（由此可见，只要找到一个整数解，就知道所有的整数解。）

(c) 求$7x+16y=209$的所有正整数解。

(d) 求$23x+37y=3000$的所有正整数解。

(e) 用10分和25分的硬币① 支付5美元的总额可以有几种方式？

11·9 对下述马哈维拉（约在850年）不定问题求出最小的答案："旅途劳顿，忽逢美林；心花怒放，蜂拥而进。芳草鲜美，花木繁盛；硕果累累，枝叶曲坠：杨梅菩提，芭蕉槟榔，面包枣椰，痕塔棕榈，篷纳芒果。四面八方，鸟语婉转；鹦鹉杜鹃，泉边争鸣；芙蓉出水，群蜂环舞。芭蕉之果，六十三堆；各堆均等，另有七枚。二十七客，均分无余；一堆蕉果，告我几枚。"

11·10 (a) 证明：要建立费马大"定理"，只须考虑素数指数$p>2$即可。

---

① 美国和加拿大有这种硬币。——译注

(b) 假定费马大"定理"成立，证明：如果n是大于2的正整数，则曲线$x^n+y^n=1$上除了与坐标轴的交点外，任何一点的坐标不能都是有理数。

(c) 费马曾证明：整数边的直角三角形的面积不可能是正方形数。试据此证明：方程$x^4-y^4=z^2$没有正整数解x, y, z。然后再就$n=4$的情形证明费马大"定理"。

进一步的读物

Heath. T. L. , *Diophantus of Alexandria. rev. ed.* New York: Cambridge University Press. 1910.

Sierpinski, Waclaw, *A Selection of problems in the Theory of Numbers.* tr. by. A. sharma. New York: Pergamon Press. 1964.

Sierpinski, Waclaw, *Pythagorean Triangles.* tr. by A. Sharma. New York: Yeshiva University, 1962.

十二、代数的简写记法

代数符号体系的开端

（约在公元250年）

中学生总是觉得几何与代数对比鲜明；代数是一门高度符号化的数学研究领域，形形色色的符号鳞次栉比：+，－，×，÷的记号，表示未知量的x，y，z，表示定量的a，b，c，表示归并的各种记号（圆括号、方括号、花括号），还有指数记号、下标、根号、等号、阶乘号、排列组合记号、对数记号，等等。可是，中学生很少知道，这整个的符号体系却只有四百来年的历史，实际上，大多数符号要说有四百年还差一大截呢。

G. H. F. 内索曼于1842年首先说明了代数符号体系演变史的三个阶段：最初是**文字代数**，解题不用简写记法，也不用任何符号，而是用地道的散文形式写成；然后就是**简写代数**，采用速记符号表示某些经常出现的量、关系以及运算；最后一个阶段是**符号代数**，解题主要表现为由符号组成的一种数学速记，这些符号与它们代表的实际内容和意义并

无显而易见的联系。

在亚历山大港人刁番图的时代（公元250年?）以前，整个代数都是文字代数，这样说大概是相当正确的。刁番图对代数发展的一个重要贡献就是他对希腊代数的简写记法。不过，必须承认，在世界其他地方，除了下面要说到的印度以外，文字代数还相当普遍地持续了好几百年。尤其是西欧，在十五世纪以前，基本上都是文字代数，直到后来才开始有一些零星的简写记法。符号代数是十六世纪才开始在西欧出现的，但发展缓慢，直到十七世纪中叶才广泛流行。

古希腊代数最好的原始材料也许要算是一本叫做《帕拉泰因文苑》或《希腊文粹》的集子，那是公元500年左右由语法学家梅特洛多拉斯搜集的46个数值问题，以隽语警句的形式提出。其中有些问题很可能是编者自己的创作，但是有种种理由相信，大多数问题的起源要古老得多。这些问题，其意图显然是智力游戏，具有柏拉图（约在公元前400年）提到的一种类型，很象《莱恩德古书》（约在公元前1650年）中见到的一些问题。有一半的问题归结为一个未知量的一个线性方程，有十来个归结为两个未知量的线性方程组，有一个问题归结为三个未知量的三个线性方程，还有一问题归结为四个未知量的四个线性方程，有两个不定线性方程的例

子。有很多问题非常象我们目前代数课本中见到的一些标准形式的问题，例如，“分配”问题，“工作”问题，“水池”问题，“混合”问题，“年龄”问题，等等。一般说来，这些问题用现代的代数符号体系来处理没有什么困难，但是必须承认，文字解答则颇费心思。谁要是不信，可以试手对下列从《帕拉泰因文苑》中随便选出的例子给以纯用文字表达的解答：

1.（分配问题）六人分果，甲取三分之一，乙取八分之一，丙取四分之一，丁取五分之一，戊取十枚，尚余一枚归己。问总数若干？

2.（年龄问题）有德奠凯锐斯者，其童年占其高寿之四分之一，其青年占五分之一，成年占三分之一，及至老年，今已度过十三载矣。问其寿高几何？

3.（工作问题）制砖师，余急欲建此屋，今日万里无云，余不需多砖，仅缺三百之数。独劳一日，汝可得此数，汝子则得二百，汝婿可得二百五十。汝等通力合作，几日当可竣工？

4.（水池问题）余乃黄铜之狮也，以双眼、嘴、右脚面为喷水口。余之右眼两日（一日为十二时辰）注满一罐，左眼需三日，右脚则需四日，余之嘴仅需六时即可注满。此四口同时注水，请告几时可满？

5. (混合问题) 以金、铜、锡、铁制作王冠，重六十迈纳①：金与铜占其三分之二，金与锡占四分之三，金与铁占五分之三。试求所需金铜锡铁之量。

刁番图的《算术》之所以应该算是一件"数学史菁华"，不仅是因为前讲所述它那引人注目而影响深远的算术内容，而且也因为如下所述这部著作中含有代数记法的萌芽。这些原始的记号具有速记上的简写性质。

《算术》中可以找到一些简写记号，表示未知数、未知量直到六次的方幂、减号、等号以及倒数。英语词*arithmetic* (算术) 就是来自希腊语的单词arithmetike，这是一个复合词，其词素arithmos表示"数"，而techne表示"技术"。T. L. 黑瑟曾经指出，刁番图表示未知量的记号大概是把arithmos这个词的头两个希腊字母α和ρ合并而成，这是相当令人信服的。这个记号最后变成象是希腊文结尾的Σ即s的样子。尽管这是猜测，但表示未知量方幂的记号，其意义却是无可怀疑的。例如，"未知量的平方"记为Δ^{Υ}，这是表示"方幂"的希腊词ΔΥNAMIΣ的头两个字母。其次，"未知量的立方"记为K^{Υ}，这是表示"立方"的希腊词KΥBOΣ的头

① 古希腊及埃及衡量单位，约合177.2克。——译注

两个字母。于是，未知量的以后几个方幂就容易解释了：$\Delta^{Y}\Delta$（平方平方），ΔK^{Y}（平方立方），$K^{Y}K$（立方立方）。刁番图的"减号"象是颠倒的V中间画条角平分线，这可以解释为Λ和I合并而成，这是表示"短缺"的希腊词$\Lambda EI\Psi I\Sigma$中两个字母。相加就把记号并列在一起；一个表达式中所有的负项集中在一起，前面冠以减号。未知数的任何方幂的系数是把相应的希腊字母数字放在该方幂记号的后面。如果有常数项，则用表示"单位"的希腊词$MONA\Delta E\Sigma$的简写$\overset{\circ}{M}$，再把相应的系数放在后面。

希腊字母数字如下：

1	α	阿尔发	10	ι	艾欧塔	100	ρ	柔
2	β	贝　塔	20	κ	卡　帕	200	σ	瑟格马
3	γ	伽　马	30	λ	拉姆达	300	τ	托
4	δ	德尔塔	40	μ	谬	400	υ	尤普赛仑
5	ε	厄普瑟仑	50	ν	纽	500	φ	弗　哀
6		已废弃的迪伽马	60	ξ	克　赛	600	χ	凯
			70	ο	欧迈克闰	700	ψ	普赛
7	ζ	日依塔	80	π	派	800	ω	欧米伽
8	η	厄　塔	90		已废弃的寇　帕	900		已废弃的萨姆派
9	θ	瑟　塔						

这些数字符号的用法例如有

$$13=\iota\gamma,\quad 31=\lambda\alpha,\quad 742=\psi\mu\beta.$$

再配上"横线"和"撇号"则可以表示更大的数，已废弃的字母迪伽马、寇帕、萨姆派分别如图43

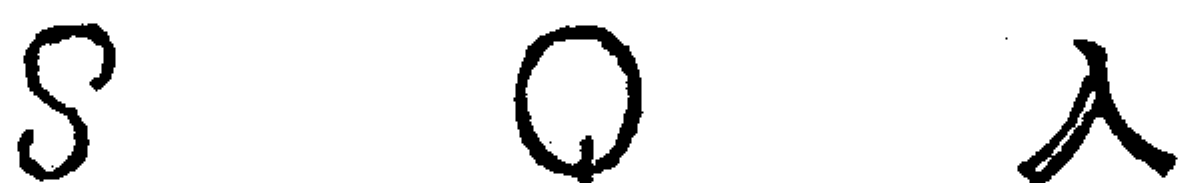


图43

所示①.

有了上面的数字符号和简写记法，就可以把

$$x^3+13x^2+8x \text{ 与 } x^3-8x^2+2x-3$$

表为

$$K^{\Upsilon}\alpha\Delta^{\Upsilon}\iota\gamma s\eta \qquad \text{与} \qquad K^{\Upsilon}\alpha s\beta \pitchfork \Delta^{\Upsilon}\eta\overset{\circ}{M}\gamma,$$

照字面读作

“未知数立方1，未知数平方13，未知数8”与“(未知数立方1，未知数2)减(未知数平方8，单位3)”. 文字代数最初就是这样变成简写代数的，这是一件“数学史菁华”.

本讲开头曾经指出，印度人也有他们的简写代数：和刁番图一样，相加由并列表示；相减就在被减项上方打一个小圆点；相乘是在所有的因子后面写上bha②（这是表示“乘积”的词bhavita的第一音节）；相除是把除数写在被除数下面；平方根则是在该量前面写上ka（取自表示“无理数”的词ka-rana）；布拨马古普塔（七世纪人）把未知量记为

① 图43中第一字母不是迪伽马的写法，而是Σ在词尾的写法. “迪伽马”是指两个“伽马”重写，所以形如英语字母表第六字母“F”. ——译注

② 读作“巴”. ——译注

$y\bar{a}$（取自表示"同样多"的词 $y\bar{a}vatt\bar{a}vat$）；已知整数是在前面冠以 $r\bar{u}$（取自表示"绝对数"的词 $r\bar{u}pa$）；其他的未知量则以表示各种颜色的词的第一音节来表示，例如第二个未知量则可能记为 $k\bar{a}$（取自表示"黑色"的词 $k\bar{a}laka$）．因此，

$$8xy+\sqrt{10}-7$$

就可能记为

$$y\bar{a}k\bar{a}8bhaka10r\bar{u}7.$$

十五世纪末、十六世纪初，有些意大利数学家也在他们的代数中引进了一点简写记法，例如L．帕丘里（约1445-1509）在其《算术概要》（1494年）一书中使用了下列简写记法：p（取自表示"多"的词piu）表示相加，m（取自表示"少"的词meno）表示相减，co（取自表示"事物"的词cosa）表示未知量x，ce（取自censo①）表示x^2，cu（取自cubo②）表示x^3，cece（取自censo-censo）表示x^4．相等有时记为ae（取自aequalis③）．

于是，代数发展到符号阶段的时机成熟了．例如，R．锐柯德（约1510—1558）在其《维蒂之磨刀石》一书（1557年）中给出了我们现在使用的符

① 意大利语，意为"利息"、"租税"、"家产"，与x^2似无直接联系．——译注

② 意大利语，意为"立方"．原文为cuba，意大利语无此词．——译注

③ 拉丁文：相等．——译注

号“=”．锐柯德说明了他采用两段相等的平行线来表示等号的理由是“盖他二物皆弗能胜斯任也”①。我们熟悉的根号“√”是1525年C.儒道夫在其题为《Die Coss》②的代数著作中引进的，因为这很象是表示Radix③的小写的r。我们现在的“+”、“-”号第一次印出来是在J.魏德曼(约1460年生于波希米亚) 1489年在莱比锡出版的一本算术书里，不过这些记号不是用来作为运算符号，而只是表示超过与欠缺．加号很可能是从拉丁文的et缩写而成，因为这个词经常用来表示相加；减号则可能从表示相减的简写记法$\bar{m}$缩写而成．还有别的种种解释也是言之成理的．“+”与“-”这两个符号于1514年由荷兰数学家V．霍克用作代数运算的符号，不过很可能早就这样使用了．1572年，R．勃恩贝尔利(约1526-1573)出版了一本代数书，其中对代数记法有所改进：例如，$\sqrt{7}+\sqrt{14}$这个混合表达式，帕丘里可能会写成RV7p R14，这里RV是radix universalis④的简写，表示对所有后面的量取平方根，而勃恩贝尔利则可能写成R⌊7pR14⌋．

---

① 原文是一句古英语：bicause noe 2 thynges can be moare egualle.这里 bicause=because, noe=no, thynges=things, moare=more．意谓：因为任何其他两个东西都不可能比“=”更具有相等的效果了．——译注

② 德语，意义不详．——译注

③ 德语：根．——译注

④ 拉丁文：总根号．——译注

勃恩贝尔利还用Rq和Rc分别表示平方根和立方根。十六世纪的法国数学大师F。维埃特（1540—1603）对于代数符号体系的发展贡献殊多，他用元音字母表示未知量，用辅音字母表示已知量。我们现在用英语字母表上后面几个字母表示未知量，前面几个字母表示已知量，这个习惯是1637年R。笛卡尔（1596—1650）引进的。在维埃特以前，用不同的字母或符号表示一个量的各种方幂，这已是通例；维埃特则使用同一字母，加以适当的说明。例如，现在的x，x^2，x^3，维埃特就写成A，A quadratum，A cubum①，后来的作者进一步简写为A，Aq，Ac。我们现在的指数记法x，x^2，x^3等等也是笛卡尔引进的。T。海锐尔特（1560—1621）在其1631年出版的遗著《实用分析方法》中给出了我们现在的不等号“>”和“<”。W。阿垂德（1574—1660）曾极力强调数学符号，制定了150多个，其中只有三个保留下来：叉号“×”表示相乘，四个圆点“∷”用于比例，还有我们经常使用的表示相差的记号“～”。②

我们现行的函数记法中的符号$f(x)$，表示自然对数的底的e，表示级数求和的Σ，表示虚数单位

---

① 拉丁文记法，可读作“A平方”、“A立方”。——译注

② 比例记法a:b::c:d现在似乎已不用，换成了a:b=c:d或a/b=c/d.此外，“～”这符号现在也只用来表示“近似”或“等价”。——译注

$\sqrt{-1}$的 i，这些约定应该归功于L.欧拉（1707—1783）。记号$n!$称为n的阶乘，则是斯特拉斯堡的C.克阮普（1760—1826）于1808年引进的，他选择这个符号是为了避免先前使用的符号$n\rfloor$引起的印刷困难。J.瓦里斯（1616—1703）第一个完善地说明了零指数、负指数、分数指数的意义，他还引进了我们现在表示无穷的记号“∞”。古代英国数学家W.阿垂德、I.巴若（1630—1677）以及D.格勒格锐（1661—1708）曾经用记号π表示圆周。英国人W.宙恩斯（1675—1749）在1706年的一份出版物中第一个使用这个符号表示圆周与直径之比。不过，直到1737年欧拉采用以后，这个符号才一般用来表示圆周率。

练习

12.1. 使用中学代数解讲演正文中的问题1,2,3,4.

12.2. 公元前四世纪一位二流数学家塞马锐达斯给出了n个未知数的一组特殊的n个联立线性方程的解法。这个解法很著名，以“塞马锐达斯之花”的名称流传下来：

如果n个量之和已知，其中一个特殊的量与其余任何一个量之和也是已知，则此特殊的量等于后面那些和数之和

与第一个和数之差的$1/(n-2)$倍。

(*a*) 证明上述规则。

(*b*) 说明讲演正文中的问题5是塞马锐达斯之花的数值实例。

12.3. 下述问题出自《帕拉泰因文苑》，似乎是对刁番图的生平做了一个概述："刁番图之童年占其一生六分之一，青年占十二分之一，成年待娶占七分之一。婚后五年得子，先于其父五年而故，享有其父寿数之半。"假定问题中的细节准确，试问刁番图高寿几何？

12.4. (*a*) 要用希腊字母数字系统写出小于1000的各数必须记住多少不同的符号？

(*b*) 按照希腊字母数字系统，表示数字1000，2000，…，9000经常是在表示1，2，…，9的符号上加撇号，例如1000可能表为α'。数字10,000，即是myriad，记为M。乘法规则适用于10000的倍数，例如20000，300000及4000000表为βM，λM和υM。试用希腊字母数字写出以下各数：5780，72803，450082，3257888。

(*c*) 试就希腊字母数字系统造出直到$10+10$的加法表及直到10×10的乘法表。

12.5. (*a*) 用刁番图的简写记法写出$2x^4-21x^3+12x^2-7x+33$。

(*b*) 用印度人的简写记法写出$3xy+2x+$

$2y+\sqrt{13}-8$.

12.6. (*a*) 用勃恩贝尔利的记号写出表达式

$$\sqrt{\sqrt[3]{(\sqrt{68}+2)}-\sqrt[3]{(\sqrt{68}-2)}}.$$

(*b*) 勃恩贝尔利曾用*di m R q* 11表示$\sqrt{-11}$. 试用现代记号写出勃恩贝尔利著作中见到的下述表达式

Rc ⌊4*p di m R q* 11⌋ *p R c* ⌊4 *m di m R q* 11⌋.

12.7. 维埃特曾经对多项式方程的系数添上说明语，使该方程成为齐次方程，他使用了我们现在的“+”、“−”记号，但他没有等号。例如，他可能把

“$5BA^2-2CA+A^3=D$”

写成

“*B* 5 *in A quad* − *C plano* 2 *in A* + *A cub aequatur D solido*①”。注意系数*C*与*D*的说明语如何使方程的每一项都成为三维的。试按维埃特记号改写

$$A^3-3BA^2+4CA=2D.$$

进一步的读物

Cajori, Florian, *A History of Mathematical Notations*, 2 vols. Chicago:Open Court

① 拉丁文简写记法，可以读作“B5A平方—C二维 2A＋A立方等于D三维”。——译注

1928-1929.

Heath, T. L., *Diophantus of Alexandria*, rev. ed. New York:Cambridge University Press, 1910.

十三、两件古代的计数发明

算盘（时期古不可考）

印度阿拉伯数字系统（公元800年前）

今天，全世界的语言文字千差万别，使人眼花缭乱，但是全世界的人做算术几乎都使用同样的数字符号，（大多数）都运用同样的计算方式。

世界各地有一种通用的、人人熟悉的记数方式，就是把0，1，2，3，4，5，6，7，8，9这十个数字符号放在适当位置列成一排。这种记数方式有助于形成进行算术运算的种种简明法则或格式，即所谓的算法，例如加法、减法、乘法和除法，求平方根和立方根的算法，求两个已知正整数的最大公约数的算法，等等。小学生掌握这些基本算法要花去相当多的时间，他们是靠两种简单的记熟了的表，即所谓**加法表**和**乘法表**而学会这些演算的。这种世界通行的记数法称为**印度阿拉伯数字系统**，理由详下。

检查古代其他的数字系统，可以发现，这些系统一般都比较拖泥带水，难以驾驭，不能借以建立

起简便易行的算法。例如，上一讲我们谈到的希腊字母数字系统，这个非常古老的数字系统的确可以提供一种相当紧凑的记数方法，但却使用了那么大量的符号，使人的记忆力负担过重。我们大多数人都熟悉的罗马数字系统是另一个例子，试以这个系统进行较长的乘法或除法，或者，再如求平方根，就会发现其笨拙之处；这个系统除了简单的加减法以外似乎无法借以建立起简便易行的演算法则。

印度阿拉伯数字系统的印度命名，是因为我们认为这是印度人发明的，又以阿拉伯命名，是因为阿拉伯人加以采用然后传播到西欧。关于我们现在的数字符号，保存下来最老的样本可以在耸立于印度的一些石柱上找到，那是公元前250年左右毛里亚①统治者厄叟克王建立的。如果解释确凿，印度还有另外一些古老的样本，例如普纳城郊山洞石壁上大约是公元前100年的石刻史料，还有纳塞克山洞里大约是公元200年刻下的碑文。可是，这些古老的样本却没有零的符号，也不使用定位记号这一重要观念。定位记号和零的记号究竟何时在印度出现尚属未知，但这必定是在公元800年前的某个时候，因为波斯数学家阿夸锐兹米在公元825年的一本书里讲到了这样一个业已完成的印度数字系统。

---

① 毛里亚为印度古代北方国家。据另一说法，厄叟克为马伽达国王。——译注

这些新的数字符号第一次是如何传入欧洲，以及何时传入，这些问题都没有确定的解答，不过很可能是地中海沿岸的商人和旅客传入的。十二世纪的一份西班牙文手稿中已经出现了这些符号，那是公元711年侵犯西班牙半岛的阿拉伯人传入的，阿拉伯人在那里居住了几百年。阿夸锐兹米的著作在十二世纪有了拉丁文译本，后来欧洲人也有论述这个主题的著作，其中特别有影响的一部著作将在稍后一讲里讨论，由于这些著作的出现，印度阿拉伯数字系统便流传得更为广泛了。

人们也许很想知道，为什么古人未曾想出比较切实可行的数字系统，即比较适合简单计算法则的系统①？换句话说，为什么未曾更早些想出与印度阿拉伯系统相似的系统，以及加减乘除、开平方、开立方的算法？这样一种发明之所以姗姗来迟，是有其实际原因的。没有丰裕、便利而价廉的某种适当的书写材料，几乎任何人都很难想出这样的数字系统。人们想必记得，我们平常的机制纸浆纸不过才百来年的历史。较早的布浆纸是手工制造的，所以价格昂贵，颇为希罕，即便如此，也是到十二世纪才传入欧洲的，虽然中国人很可能早一千年就知道如何制造了。更早的书写材料，如石头与凿子、

① 这里的古人应指印度阿拉伯数字系统发明以前的古人。——译注

陶制书板、沙盘、纸莎草纸、羊皮纸、犊皮纸，要不是太不方便，就是太难搞到，无法当作草稿纸用；而要逐渐形成一些恰当的算法，就需要以反复试验形式出现的大量草稿工作。敷上薄薄一层红粉的小白板、蜡面板、书写石板，这些东西总的说来是更晚才开始使用的，再配上尖的铁笔，倒是适合于发展古代的算法。由于书写范围有限，又容易擦掉，所以这些古代的算法是以脑子作为空间想出来的，因为算法中的数字一旦完成了自己的使命就被抹去了。结果，要检查一个计算过程就必须把整个过程再重复演算一遍。人们往往不知道，我们现在配合印度阿拉伯数字系统使用的计算法则，大多数都是到十三世纪才最后定型的。

那么，古人又是怎样进行算术运算的呢？绕过上述困难的办法就是利用那个简单而非凡的发明——算盘。

算盘是一种非常古老的装置，在古代和中世纪，世界各地采用的形状各有不同；除了人的手指外，算盘就是人类最古老的计算工具了（究竟有多么古老并不确知）。有了算盘就可以加减乘除、开平方、开立方；算盘到了敏捷熟练的行家手里，完成这些算术运算的速度与精度是惊人的。

算盘最原始的形式似乎是一种有标记的沙盘，由此产生出算盘的属性名称abacus（来自希腊文表

示"沙盘"的词abax)．古代埃及人、希腊人、罗马人、印度人以及远东各国人民都使用过各种形状的算盘。形状比较复杂的算盘是一块板子上挖出一些沟槽，使小石子(calculi)①可以在其中滑动；另一种是一个木制的框架，把珠子穿在绳上或细竹棍上滑动。

我们来讲一种粗糙的算盘，说明如何用它来做罗马数字的加法。画四条铅直的平行线，从左到右标上M，C，X和I，再找一些方便的筹码，例如棋子或硬币。一个筹码放在I、X、C或M线上，就分别代表1，10，100或1000。为了减少以后一条线上可能出现的筹码数目，我们约定：一条线上任何五个筹码可以换成紧靠在该线左边那个空格里的一个筹码。因此，这些空格可以从左至右标上D，L及V。于是，小于10000的任何数都可以在我们的线条框架上表示出来，使得任何一条线上的筹码不超过四个，两条线之间的空格上筹码不超过一个。

现在让我们做加法：

MDCCLXIX＋MXXXVII.

把第一个数用筹码在框架上表示出来，如图44左边所示。现在把第二个数加上去，从右做到左。要加上VII，就在X和I这两条线之间再放一个筹码，并

① 拉丁文：筹码，算珠。——译注。

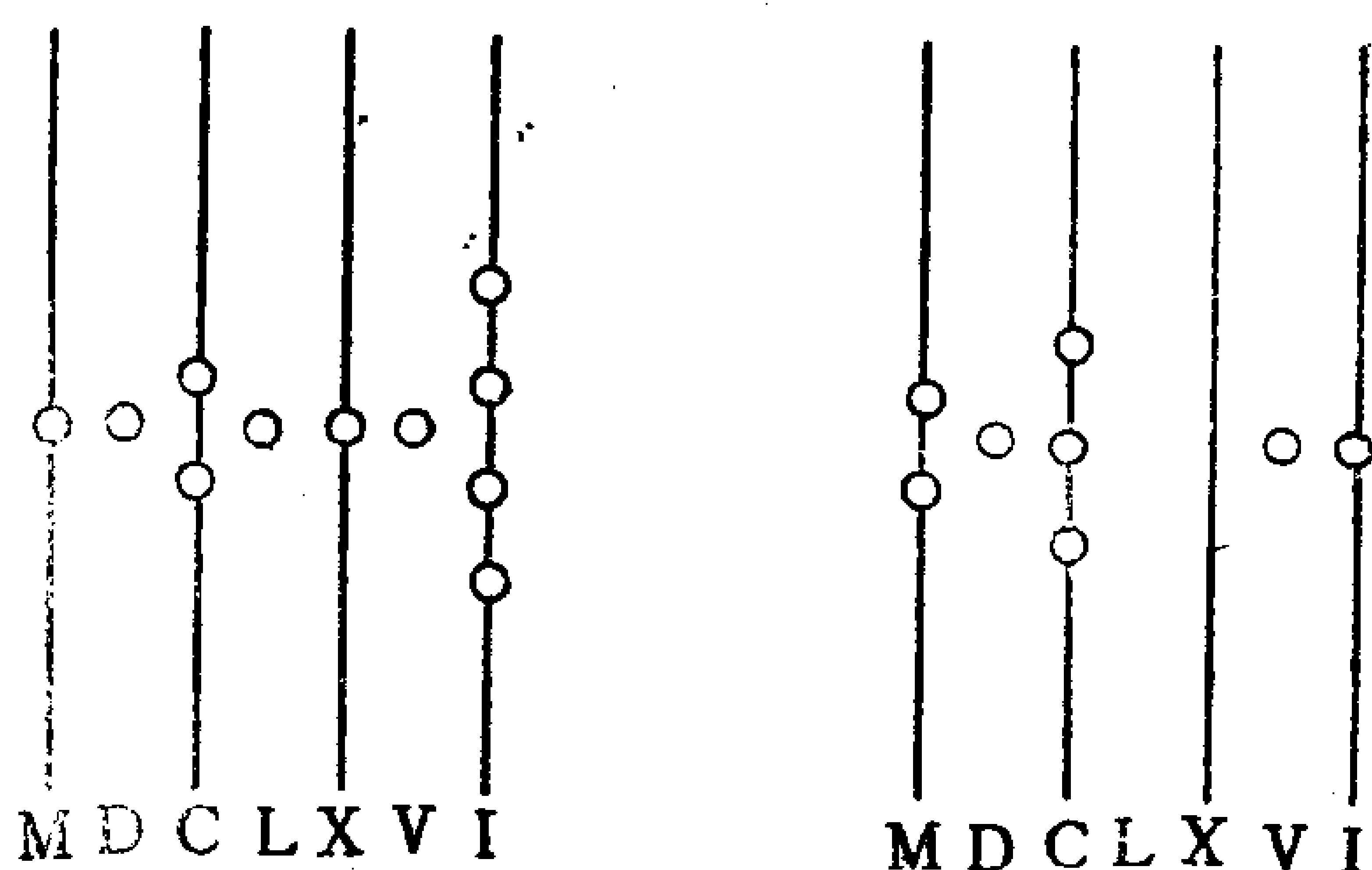


图44

且在I这条线上再放两个筹码．这时I这条线上就有六个筹码了，我们除去其中五个而在X与I这两条线之间再放一个筹码．对于X与I这两条线之间的这三个筹码，我们把其中两个“进位”到X线上作为一个筹码．现在再来加XXX，在X线上再放上三个筹码．由于现在X线上总共有五个筹码，所以可以换为C与X这两条线之间的一个筹码，而结果在该处的两个筹码又“进位”为C线上的一个筹码．最后再加上M，在M线上再放上一个筹码．框架上最后的形状如图44右边所示，和数可以读出为MMDCCCVI．我们得到这两个数之和是利用一些简单的机械操作，不需要什么草稿纸，也不需要记住什么加法表．

减法的操作相仿，不过现在不是向左边“进位”，而是必须向左边“借位”．例如，考虑减法问

题

MMDCCCVI－MDCCLXIX。

把第一个数用筹码在算盘框架上表示出来，如图45左边所示，我们来减掉第二个数，从右做到左。由于VI减IX不够减，必须向左边"借"一个。从C线上取出一个筹码，把它换成L空格上的一个筹码与X线上的五个筹码，然后再把X线上的一个筹码换成V空格上的一个筹码与I线上的五个筹码。现在框架上的样子如图45中部所示。我们现在可以减掉Ⅸ，即是VIIII了，结果V空格上只剩下一个筹码，I线上剩下两个筹码。这时就可以依次减掉一个X筹码、一个L筹码、两个C筹码、一个D筹码和一个M筹码。框架上最后的形状如图45右边所示，所求的差数可以读出为MXXXVII。我们得到这两个数之差也是利用一些简单的机械操作，并不使用什么草稿纸，也不需要记住什么算术表。

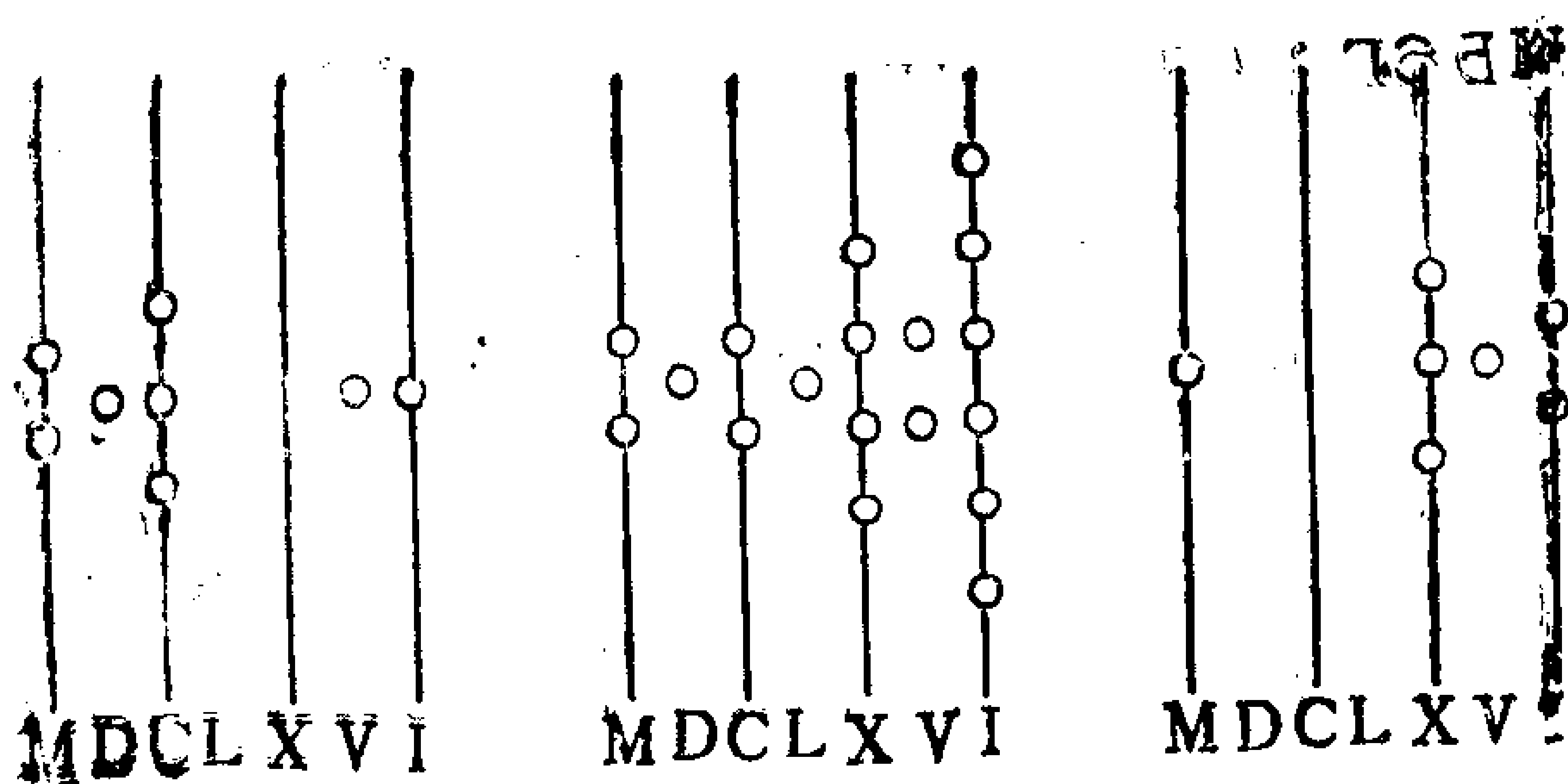


图45

印度阿拉伯十进位数字系统表数方式很简单，即是按照顺序把算盘各档上的算珠个数记录下来；符号0表示该档上没有任何算珠，我们目前采用的加减法演算格式以及“进位”与“借位”的概念，很可能来源于在算盘上进行这些运算的操作过程。采用印度阿拉伯数字系统以后，我们工作的对象就是符号而不是真正的算珠，所以要么必须记住那些简单的数字组合的结果，要么必须依靠基本的加法表。

中世纪有些欧洲人曾经鼓吹使用罗马数字配合算盘进行计算，这些人被称为“算盘主义者”；还有一些人鼓吹使用印度阿拉伯数字配合适当的算法进行计算，这些人被称为“算法主义者”。自1100年至1500年这四百年间，算盘主义者与算法主义者进行了长期的、有时是激烈的战斗，到1500年我们现在这些计算法则赢得了至高无上的地位。又过了几百年，算盘主义者几乎被人遗忘，到了十八世纪，算盘在西欧已经杳如黄鹤，无影无踪了。法国几何学家邦塞勒跟随拿破仑远征俄国，当了俄国人的战俘，获释以后他把一件算盘样品带回法国，这样算盘才作为一种古玩奇物再度露面。现在世界上大多数地方都遵循印度阿拉伯数字系统及其算法，但是东方有些地方仍然在使用算盘，例如中国、日本和俄国都有算盘，有些阿拉伯国家也有类似的计算工具。

印度阿拉伯数字符号经历过相当多的变化直到

印刷术出现以后才渐趋稳定。英语词zero起源于阿拉伯语的sifr的拉丁化形式zephirium，后者又是印度语sunya的转译，意思是“空空如也”。阿拉伯语的sifr在十三世纪由内莫援锐斯传入德国，写成cifra，由此派生出我们现在的英语词cipher。

今天，要批评算盘主义者因循守旧、不求改变，这是很容易言之成理的，但是对这些新数字忧心忡忡也是自然的：这些数目字奇形怪状，长时期未能标准化；零这个数字尤其容易弄错；要耐心学会很多事情然后才能正确使用这些新的符号。此外，算盘主义者对这些新数字还有一个更为有力、颠扑不破的反对理由：新数字太容易弄虚作假了。0很容易改成6或9，1也容易变成4，6，7或9；其他数字的形式也可以窜改，往往还可以在已经写下的数字中间或后面插进一些数字。正是由于可能发生这些弄虚作假的现象，1299年翡冷翠①市政当局才颁布一道法令，禁止在金融事务中使用新数字，否则科以罚金。

本讲讨论的两种非凡的古代发明，即算盘和印度阿拉伯数字系统，对人类进行计算工作提供了巨

---

① 意大利中部文化名城，英文名称是Florence，通译为佛罗伦萨，这里从徐志摩1925年《翡冷翠山居闲话》中据意大利文原名Firenze的译名。这个译名无论就音似及内涵都堪称佳妙，后来由傅雷在其巴尔扎克《人间喜剧》的译本中加以继承。——译注

大的帮助。但是，这两种发明的起始时期不详：印度阿拉伯数字系统肯定是公元800年前某个时候出现的，算盘则古老得多。不过，毫无疑问，在历史上互相关联的这两大发明都是"数学史菁华"。

虽然世界上大多数地方对算法主义者亦步亦趋，但今天美国、法国以及其他国家的小学教师讲授印度阿拉伯数字系统中的位值观念①时，仍然觉得算盘是一件有用的教具；商店售货员清点雇客钞票的台子我们仍然叫做"Counter"②。我们已经说过，加法中的"进位"与减法中的"借位"这些观念很可能来源于在算盘上进行这些运算的操作过程。英语"计算"一词calculate是从拉丁语单词calculus派生出来的，后者的意思是"石子"，而石子在罗马算盘上是当筹码使用的。今天许多游戏都是用形状一样的扁平圆筹码进行的，其起源当在算盘筹码已成家庭常物之时。

最后就我们本国的混合文化指出一个有趣的事实：我们的语言属于日尔曼语，我们的文字是拉丁字母拼写的，我们的数字则起源于印度。

---

① 例如，百位上的1，其位值是十位上的1的位值的十倍。——译注

② 英语counter本意为"筹码"、"算珠"、"计数器"，后来就衍生出"柜台"的意思。——译注

练习

13·1　利用原始算盘求下列两数的和与差：

MDCCLXXXIX, MMDCLXXVIII.

13·2　印度阿拉伯数字系统是**进位数字系统**的例子，其**底数**为10，以任何整数 $b>1$ 为底数都可建立一种进位数字系统：当底数 b 选定之后，就要采用 b 个基本符号0，1，2，…，$b-1$，称为该系统的数字。如果 $b\leqslant10$，就可以利用我们熟悉的印度阿拉伯数字符号；如果 $b>10$，则可以利用我们熟知的印度阿拉伯数字符号再添上适当数量的额外符号。

证明：任何（正整）数 N 均可唯一表为

$$N=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_2b^2+a_1b+a_0$$

的形状，其中 $0\leqslant a_i<b$，$i=0$，1，…，n。

上面这个数 N 以 b 为底数的进位表示就是数字符号序列

$$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0.$$

因此，这些数字符号中任何一个都代表底数的某个方幂的倍数，方幂的指数依赖于该数字所在的位置。例如，我们可以把3012看作以 4 为底数，以0，1，2，3 为数字符号的进位表示的数；为了说明这个数是以 4 为底数表示出来的，我们可以写成 $(3012)_4$。如果没有附上下标，一般就认为该数

是以平常的底数10表示出来的。

13·3 (*a*) 构造底数 7 的加法表和乘法表。

(*b*) 求 $(3406)_7+(251)_7$。

(*c*) 求 $(3406)_7\times(251)_7$。

13·4 (*a*) 构造底数12的加法表和乘法表，以符号*t*和*e*表示数字10和11。

(*b*) 求 $(3t04e)_{12}+(51tt)_{12}$。

(*c*) 求 $(3t04e)_{12}\times(51tt)_{12}$。

13·5 (*a*) 用底数 8 表示 $(3012)_5$。

(*b*) 什么底数使得 $3\times3=10$？什么底数使得 $3\times3=11$？什么底数使得 $3\times3=12$？

(*c*) 27能否关于某个底数代表偶数？37呢？72能否关于某个底数代表奇数？82呢？

(*d*) 求b，使得$79=(142)_b$。

(*e*) 求b，使得$72=(2200)_b$。

13·6 (*a*) 一个以 7 为底数的三倍数如果表为以 9 为底数的数，则各位数字次序相反。求此数。

(*b*) 求最小底数，使301代表平方整数。

(*c*) 若$b>2$，证明 $(121)_b$是平方整数。

(*d*) 若$b>4$，证明 $(40001)_b$被 $(221)_b$ 整除。

13·7 以 2 为底数的进位数字系统（称为二进位制）在各个数学分支中都有应用。还有许多游戏与智力玩具，例如著名的**尼姆游戏**①与**九连环玩具**，

也是靠这个系统求解的。下面是这类智力问题中两个容易解决的

(*a*) 一架简单的等臂天平配有一套砝码，1磅、2磅、2^2磅、2^3磅等等每种只有一个砝码。试说明如何称出任何整数磅的重量W。

(*b*) 考虑图46所示四张卡片，上面印有从1

1	9	2	10	4	12	8	12
3	11	3	11	5	13	9	13
5	13	6	14	6	14	10	14
7	15	7	15	7	15	11	15

图46

到15的某些数字：第一张卡片上是二进制表示末位数字为1的所有各数；第二张卡片上是倒数第二位数字为1的所有各数；第三张卡片上是倒数第三位数字为1的所有各数；第四张卡片上是倒数第四位数字为1的所有各数。现在请你考虑从1到15的一个数N，只要告诉我在哪些卡片上可以找到这个

---

① 有N堆火柴，各堆数量不必相等。甲乙两人轮流从中取出至少一根火柴，但每次只能取自一堆火柴，最后拿完火柴者为胜。设甲在取出火柴后第k堆火柴的数目为h_k ($k=1,\cdots\cdots,N$)，表为二进位数

$$h_k = h_{k0} + 2h_{k1} + 2^2h_{k2} + \cdots,$$

其中$h_{ki}=0$或1. 如果甲在每次取出火柴后都能保持

$$\sum_{k=1}^{N} h_{ki} = 0 \pmod 2,$$

则甲能获胜。——译注。

N，我就可以轻而易举地说出你想的那个数N，这只要把它所在的那些卡片上左上方的数加起来就行了。现在请你编一套这样的六张卡片，查出从1到63的任何一个数。如果印有这些数的卡片，其重量依次为1，2，4，…单位，那么只要在邮政天平那样的自动检测器上一称，就可以读出数N来了。

13·8 许多简单的“猜数”的把戏可以用我们的十进位制来说明。请说明下面这些把戏的诀窍。

(*a*) 请你想好一个二位数，然后把十位上的数字乘以5、加上7、再乘以2、最后加上原数的个位数字，说出最后的结果。耍把戏的人根据这个结果暗中减去14就得到你的原数了。

(*b*) 请你想好一个三位数，然后把百位数字乘以2、加上3、乘以5、加上7、再加上十位数字、乘以2、加上3、乘以5、再加上个位数字，说出最后的结果。耍把戏的人根据这个结果暗中减去235就得到你的原数了。

(*c*) 请你想好一个三位数，其百位数字与个位数字不同，然后求出这个数与三个数字次序颠倒而得的那个数之差，当然是大的减小的。只要你说出这个差数的个位数字，耍把戏的人就能说出整个的差数。请问这个把戏是怎么耍的？

13·9 十五世纪和十六世纪的算术著作都讲

到了基本算术运算的演算格式。为了进行长数字乘法而设计的许多格式中，最流行的也许是所谓的gelosia①法，即“窗格法”。这个方法历史悠久，图47说明了9876与6789相乘得到67048164的演算格式。这个方法大概首先是在印度研究出来的，因为在对巴斯卡拉（1114—约1185）的著作《里拉瓦底》的一篇评论中以及印度人的其他著作中都有所论述。后来，这个方法从印度传入中国、阿拉伯和波斯，在很长时期内深受阿拉伯人的喜爱，由此再

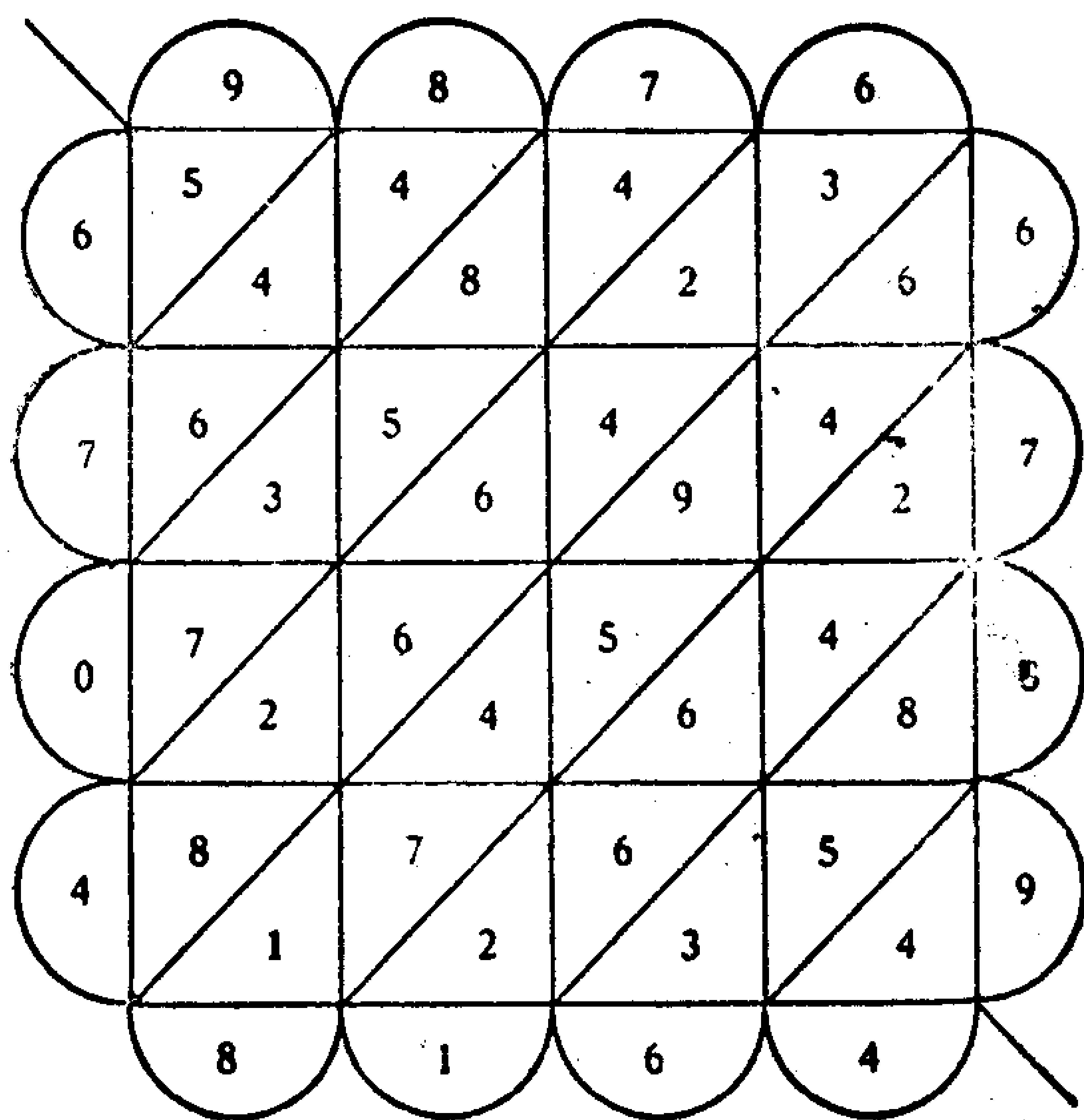


图47

① 意大利文：百叶窗。——译注

传入西欧。这种方法简便易行，要不是因为所需要的网线难以印刷、甚至难画，很可能今天还在使用。演算格式很象是有些窗子上使用的格子。这种窗子我们过去叫做gelosia，最后变成了jalousie（取法语“百叶窗”之意）①。

试用窗格法求80342与7318的乘积。

13·10 十七世纪以前长数字除法最通用的演算格式是所谓“帆船法”或“勾划法”，很可能起源于印度。为了说明这一方法，我们来考虑9413除以37的以下步骤。

1. 把除数37写在被除数的下方，如右所示。按通常方式求出第一个商数2，把它写在被除数右边。

```
9413 | 2
37
```

2. 考虑到2×3=6,9－6=3,所以把9与3勾掉，在9的上方写一个3.考虑到2×7=14，34－14=20,所以把7,3,4勾掉，在3的上方写一个2,在4的上方写一个0。

```
 2
30
9413 | 2
37
```

3. 第2步所得到的被除数是2013。再写下除数37，向右边挪一位，写成对角线形状.求出

```
  1
 25
306
```

①英语中的“百叶窗”过去借用意大利文gelosia，后来改用法语词jalousie，但这两个外来语只作为百叶窗的专用词，其他的意义英语则用jealousy。——译注

第二个商数5。考虑到$5\times3=15$，$20-15=5$，所以把3，2，0勾掉，在0的上方写一个5。考虑到$5\times7=35$，$51-35=16$，所以把7，5，1勾掉，在5的上方写一个1，在1的上方写一个6。

```
9413 |25
377
3
```

4． 第3步所得到的被除数是163。再写下除数37，向右边再挪一位，写成对角线形状。求出第三个商数4．考虑到$4\times3=12$，$16-12=4$，所以把3，1，6勾掉，在6的上方写一个4。考虑到$4\times7=28$，$43-28=15$，所以把7，4，3勾掉，在4的上方写一个1，在3的上方写一个5。

```
11
254
3065
9413|254
3777
33
```

1
5

5． 所求的商数是254，余数是15。

帆船法只要稍加练习，就会发现根本不象乍看起来那么困难。这一方法最初广为流传，是因为在沙盘上用起来很方便，划掉一个数不过就是把它抹去，然后就可以再写上一个数了。后来用上了纸和墨水，就不容易抹掉了，只好把不要的数字划掉，

一旦需要，就在原来的数字上方写下新的数字，如上面的例题所示。因此，这个方法得到“勾划法”的名称，“帆船法”的名称则是由于算式完成以后的轮廓看起来象是一艘帆船：如果从下往上看这个算式，商数就好似船头的斜桅①；如果以左边为底部向右看，商数就好似主桅，这时余数往往被写成象是主桅顶端飘扬的一面旗帜（如上所示）。

使用帆船法求65284除以594之商。（本问题用这种方法求解见1478年的《*Treviso Arithmetic*》。）

进一步的读物

Hill, G. F., *The Development of Arabic Numerals in Europe*. New York:Oxford University *Press*, 1915.

Karpinski, Louis Charles, *The History of Arithmetic*, New York:Russell & Russell, 1965,

Pullan, J. M., *The History of the Abacus*. New York:Praeger, 1968.

①古代帆船的船头有向前斜伸出去的桅杆，用来张上三角帆，调整船向。——译注

十四、柯援散的诗人数学家

凯亚姆的三次方程几何解

（约在公元1090年）

十一世纪下半叶，三个波斯青年N．茂克、H．B．萨巴、O．凯亚姆同时受业于柯援散省当时德高望重的贤人之一、奈萨普尔城的莫瓦法克阿訇①．这三个门徒都有才干，彼此亲密无间．当时人们有一个信念：阿訇的门徒中总有一个有机会飞黄腾达，所以有一天由于萨巴的提议，这三个挚友立下誓言说：不管是谁时来运转，都要有福同享，不得独善其身．随着岁月的流逝，结果茂克官运亨通，当上了阿拉兰苏丹的大臣．他那两个同学终于找到了他，要求按照以前的誓约有福同享．

萨巴要求得到一官半职，苏丹应茂克之请给予恩准，但萨巴利欲熏心、忘恩负义，竭力要把他的朋友茂克排挤掉，终于遭到贬黜，放逐他乡．凯亚姆一不要名，二不求官，只求能够生活在大臣福

---

① 阿訇，伊斯兰教教长。——译注

泽的荫庇之下，使他可以传播知识与数学，祝祷挚友的长命富贵。茂克为他老同学的谦恭与真诚所感动，使他得到一笔年金。

萨巴备尝艰辛、浪迹四方之后，成了一帮狂徒的首领，于1090年夺取了里海南部山区的阿拉姆提城堡，作为山寨，啸聚丛林，抢劫过往商队，使整个穆斯林世界一片惊慌。萨巴名扬江湖，人称“山大王”；据说，英语中的“刺客”一词assasin①要不是起源于萨巴的名字Hasan，就是起源于那帮狂徒借以壮胆以便杀人越货的“大蔴”一词hashish。在那帮刺客的无数牺牲者中就有萨巴的老同学N．茂克。

萨巴的生活动荡不安，具有破坏性，对比起来，凯亚姆的生活却是恬静安适，具有建设性，他不与人争，对于当时的文学与科学都做了显著的贡献。

于是，这三个门徒中，一个是好官和恩主，一个是可耻的叛徒与屠夫，一个是专心致志的学者与作家。本讲就是要来讨论这位学者一件非凡的数学成就，应该列为“数学史菁华”的一项成就。我们

---

① 这个词也是一个历史名词，指1091—1272年间活跃于波斯及叙利亚的伊斯兰教一个派别，专门刺杀“十字军”中的基督教徒。西欧封建主假借宗教矛盾从1096年至1291年对东方发动了八次十字军侵略，使西亚、北非地区受到严重破坏，到处都遭到人民的抵抗。作者这一段的叙述显然是站在十字军的立场上，所说的萨巴领导的斗争显然是阿拉伯人民抵抗十字军侵略的起义活动。——译注

先讲些预备知识。

一个未知数x的**实多项式方程**是指形如

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的任何方程，其中n是正整数，a_0，a_1，…，a_n是实数且$a_0\neq 0$。满足这个方程的x的值称为该方程的**根**。古代代数的一个主要任务就是建立一般的方法来求这种方程的根，也就是所谓的**解**方程。由于古代只知道正实数，所以几百年间所谓解方程是指求该方程具有的正实根。按照$n=1$，2，3，4，5，…而把方程分别称为**线性方程**、**二次方程**、**三次方程**、**四次方程**、**五次方程**…。

线性方程没有什么困难，很容易用几何方法或代数方法求解。如果一个未知数的线性多项式方程有正根，这个方程总可以写成

$$ax=b$$

的形状，这里a与b都是正数。从代数上说，$x=b/a$。从几何上说x是长度为a，b，1的三个线段的第四比例项，即$a:b=1:x$，而x可以由简单作图求得（用圆规直尺求出），如图48所示，

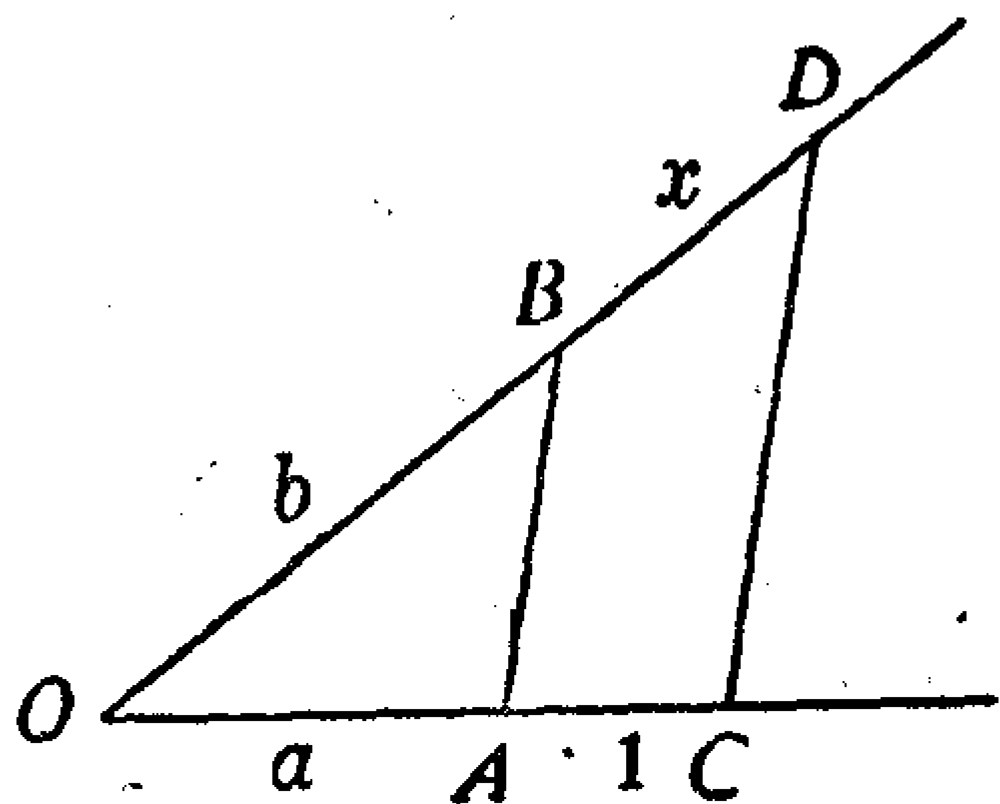


图48

COD是适当的任意角，$OA=a$，$OB=b$，$AC=1$，作CD平行于AB。

有趣的是，古埃及人解线性方程利用了后来欧洲人叫做"假置法"的方法。例如，要解

$$x+x/7=24,$$

可以取x的任何适当的值，比如说$x=7$。于是$x+x/7=8$，但不是24。由于8必须乘以3才能得到所要的24，所以正确的解x必定是$3(7)=21$。从一个纯粹的猜测居然得到了正确的答案，如何想出这一点是很令人着迷的。

二次方程当然比线性方程复杂，但古代数学家也有几何解法和代数解法。代数解法或者是用配方法或者是代入一般的二次公式，这对任何学过初中代数的人都是熟知的。大约在公元前2000年，古巴比伦人就知道这两种代数方法的等价性了。在（第八讲）练习8.10中读者可以发现希腊人用几何方法解二次方程的实质。

三次方程的问题就困难得多了，不过，古代巴比伦人靠n^3+n^2对某些已知n值列出的表求出了某些特殊的三次方程的解。阿基米德也讨论过一个三次方程可以有正实根的条件，那是评论家尤托休斯为我们保留的一件阿基米德著作的片段中提到的，而三次方程的一般代数解法只好等十六世纪的意大利数学家来完成了。可是，三次方程的几何解法几

乎在五百年前即十一世纪就由波斯诗人数学家 O.凯亚姆发现了。这就是前面提到的那件"数学史菁华"，在开始讨论之前先讲一点历史背景。三次方程的代数解法则在第十六讲讨论。

自五世纪中叶罗马帝国崩溃至十一世纪这段时期称为"欧洲黑暗时代"①，因为这期间西欧的知识与文化沉沦到最低层。可是，这同一时期内阿拉伯帝国却在蓬勃兴起。在公元623年穆罕默德从麦加逃往麦地那②之后的十年中，阿拉伯半岛分散的贝都因部族由于强烈的宗教狂热统一成一个强大的民族。一百年间，穆斯林星月统治凭借武力使伊斯兰绿色和金黄色的旗帜横扫自印度经波斯、美索不达米亚、北非直至西班牙的大片地域③。

大量的世界文化之所以保留下来，一个至关紧要的因素是阿拉伯人刻苦掌握希腊人和印度人的广博知识；印度人和希腊人的许多医学、天文学和数学著作被完整地译成阿拉伯文，这样才幸免于难，直到后世的欧洲学者再译为拉丁文及其他语言。要不是阿拉伯学者的勤奋工作，希腊和印度的许多科学著作经过那漫漫长夜的"黑暗时代"的洗劫，会

① 即通称"中世纪"。——译注

② 穆罕默德（570？—632），伊斯兰教创始人，生于麦加，葬于麦地那，所以麦加和麦地那都是伊斯兰教圣地。——译注

③ 土耳其国旗是绿底正中金黄色一弯新月和一颗金星的旗帜。——译注

湮没无闻、永不可考了．阿拉伯人除了保存大量的世界学术瑰宝功德无量以外，本身也有所成就，其中独辟蹊径者当推O．凯亚姆关于三次方程几何解的工作．

O．凯亚姆（约1044—1123）是一位波斯诗人、天文学家兼数学家，生于柯拨散省奈萨普尔城（今伊朗东北部），并在该城求学．他的绝妙好诗《儒拜雅醍》① 经E．费兹杰拨德优美而贴切的翻译之后，便名驰西方世界，深受读者喜爱．在科学界，O．凯亚姆也是知名人物，首先是因为他那非常精确的历法改革；还有他对欧几里德平行线公设的评述，说明他比萨克里② 先行一步，萨克里的思想最终导致非欧几何的诞生；尤其是他对阿拉伯代数成就的贡献，他对种种三次方程都给出了求正根的几何解法．

让我们就下述特殊类型的三次方程来说明凯亚姆的方法：

$$x^3+b^2x+a^3=cx^2,$$

这里a，b，c，x都设想为线段的长度．凯亚姆对这

---

① 四行诗集，英译本初版于1859年．——译注

② 意大利数学家(1667—1733)，致力于证明欧几里德第五公设，于1733年出版了《欧几里德无误辨》的著作，虽然未能摆脱欧几里德思想的禁锢，不敢断言第五公设的独立性，但却得到一系列正确而深刻的几何命题，为后来非欧几何的建立奠定了坚实的基础．——译注

种三次方程的文字叙述是“一个立方体，某些边加上某些数等于某些正方形。”从几何上说，这个三次方程的求解问题是：已知单位线段和线段a，b，c，求作线段x，使得a，b，c，x满足上述关系。目的是尽可能只用圆规和直尺作出x。只用圆规和直尺求解一般是不可能的，在作图的某一步上，我们一定要能够画出一条唯一确定的圆锥曲线才行。

解这个三次方程时有一个基本作图法要多次使用，即是求三个已知线段的第四比例项。这是一个古老的问题，古希腊人就已经会解了。设u，v，w是三个已知线段，我们要作线段x，使得$u:v=w:x$。与图48相似的图49会让你想起如何用圆规直尺作出所要的线段x。

我们现在来讨论凯亚姆对三次方程

$$x^3+b^2x+a^3=cx^2$$

的几何解法。首先，据基本作图法求线段z，使得$b:a=a:z$。然后，再据基本作图法求线段m，使得$b:z=a:m$。这时容易看出$m=a^3/b^2$。现在，如图50所示，作$AB=m=a^3/b^2$，$BC=c$。

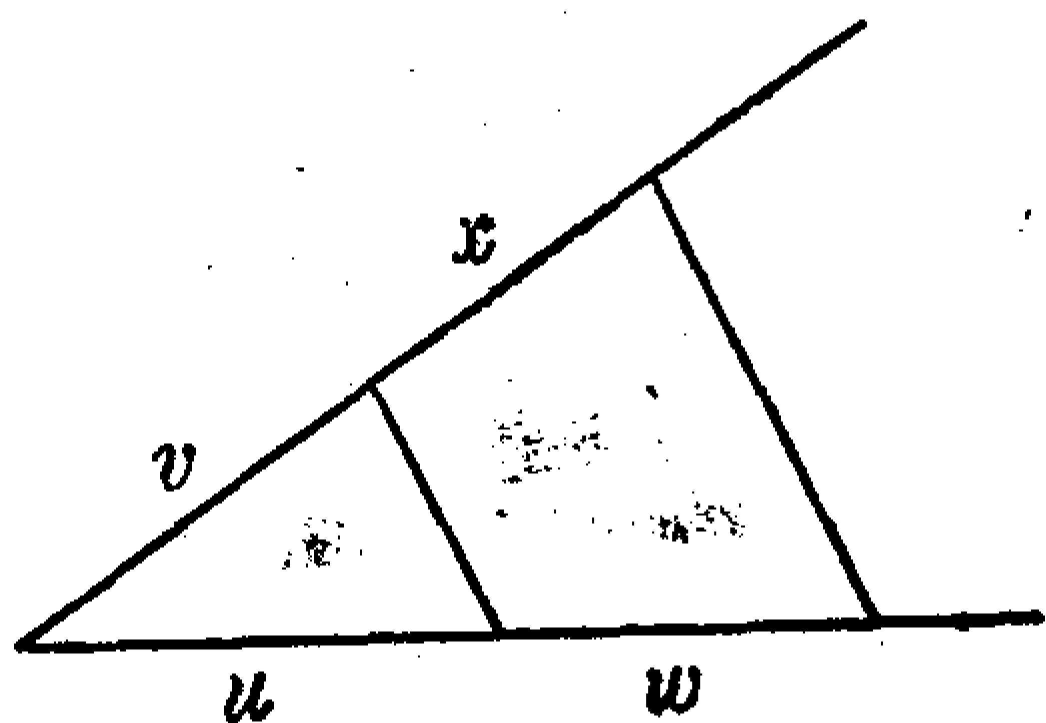


图49

以AC为直径作半圆，设AC在B处的垂线与半圆相

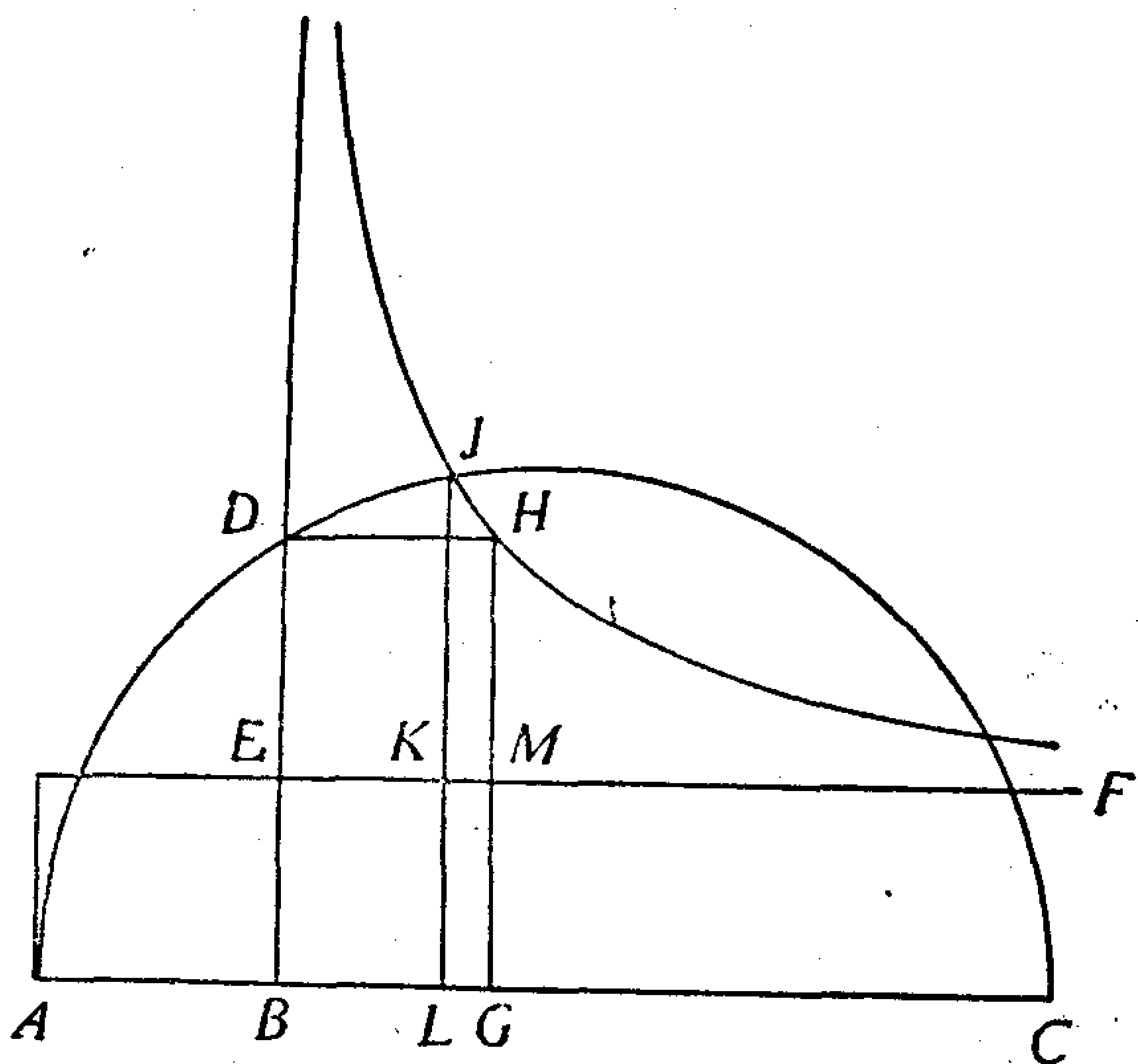


图50

交于D，在BD上截取$BE=b$，过E作EF平行于AC。据基本作图法求BC上的点G使得$ED:BE=AB:BG$，作矩形$DBGH$。过H作直角双曲线，以EF和ED为渐近线（即是如果以EF和ED为x轴和y轴，则过H的这条双曲线的方程形式为$xy=$常数）。设此双曲线与半圆相交于J，过J与DE平行的直线与EF相交于K，与BC相交于L。设GH与EF相交于M。于是，

1. 由于J与H在双曲线上，所以$(EK)(KJ)=(EM)(MH)$。

2. 由于$ED:BE=AB:BG$，所以$(BG)(ED)=(BE)(AB)$。

3. 因此，据1，2可得 $(EK)(KJ)=(EM)(MH)=(BG)(ED)=(BE)(AB)$.

4. 由于 $(BL)(LJ)=(EK)(BE+KJ)=(EK)(BE)+(EK)(KJ)=(EK)(BE)+(AB)(BE)$〔据3〕$=(BE)(EK+AB)=(BE)(AL)$，所以

$$(BL)^2(LJ)^2=(BE)^2(AL)^2.$$

5. 但是，据初等几何有 $(LJ)^2=(AL)(LC)$，

6. 因此，据4及5有$(BE)^2(AL)=(BL)^2(LC)$，或$(BE)^2(BL+AB)=(BL)^2(BC-BL)$.

7. 在6中令$BE=b$，$AB=a^3/b^2$，$BC=c$，我们得到$b^2(BL+a^3/b^2)=(BL)^2(C-BL)$.

8. 把7中最后一个等式展开，合并同类项得到 $(BL)^3+b^2(BL)+a^3=c(BL)^2$，由此可见，$x=BL$是已知三次方程的根.

必须承认，凯亚姆的方法很巧妙，中学教师肯定可以使他的学生产生兴趣. 所要的双曲线可以（利用基本作图法）逐点画出：如果N是EF上任何一点，EF在N处的垂线与双曲线交于P，则有 $(EM)(MH)=(EN)(NP)$，所以$EN:EM=MH:NP$，即NP是三条已知线段EN，EM，MH的第四比例项. 这样就可以标出双曲线上的若干点，然后把这些点用一条光滑曲线联结起来，就得到所求双曲线的草图了. 可以向学生提出一个数值三次

方程$x^3+2x+8=5x^2$，这里$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=5$，三个根是2，4，－1。这时学生就可以用凯亚姆方法求出两个正根，也许他还能把这个方法稍加引伸求出负根。这是一个很好的“初等”研究课题。J. L. Coolidge的书*The Mathematics of Great Amateurs* (*Oxford*, 1950) 第二章 (*Omar Khayyam*)，19-29页中读者还可以找到凯亚姆对其他几种三次方程的几何解法。

O. 凯亚姆大约在1123年逝于奈萨普尔。他的一个学生、萨马坎德城的K. 尼扎米说：他经常同他的老师凯亚姆在花园里交谈，凯亚姆有一次说，他将来要安葬在北风可以把玫瑰花瓣撒满坟头的地方。过了几年，凯亚姆逝世了，后来尼扎米偶然来到奈萨普尔，找到了他老师的坟墓，正好在一座花园的墙外：许多果树枝头伸出墙外，落英缤纷，撒满坟头，把墓碑都遮满了。

O. 凯亚姆之所以在近代驰名，是因为有了爱尔兰翻译家E. 费兹杰授德心领神会的译文。费兹杰授德逝于1883年，葬于英国萨弗克郡博支城一个小教堂的墓地里。1884年，《伦敦画报》的一位旅行画家W. 辛普森来到奈萨普尔，找到了凯亚姆的墓地，还不是满目荒凉。他发现墓前平台的周围种了一些玫瑰树，有些花荚还挂在枝头，他摘了几个带回英国，交给克尤植物园①的贝克尔先生。贝克

尔先生播下了这些种子，后来长成了玫瑰树，其中一株于1893年10月7日移植到费兹杰拨德的墓旁。

你瞧我们身旁那含苞欲放的玫瑰，
她说："瞧啊，我那宝囊的丝绦一旦解开，
它的珍宝便向花园泻来，
欢歌笑语就汇成我盛开的世界。"②

练习

14.1 用假置法解《莱恩德古书》（约公元前1650年）中的下述问题："一个量，其2/3，其1/2及其1/7加在一起为33。此量几何？"

14.2 我们要求出图51所示四边形的边BC之

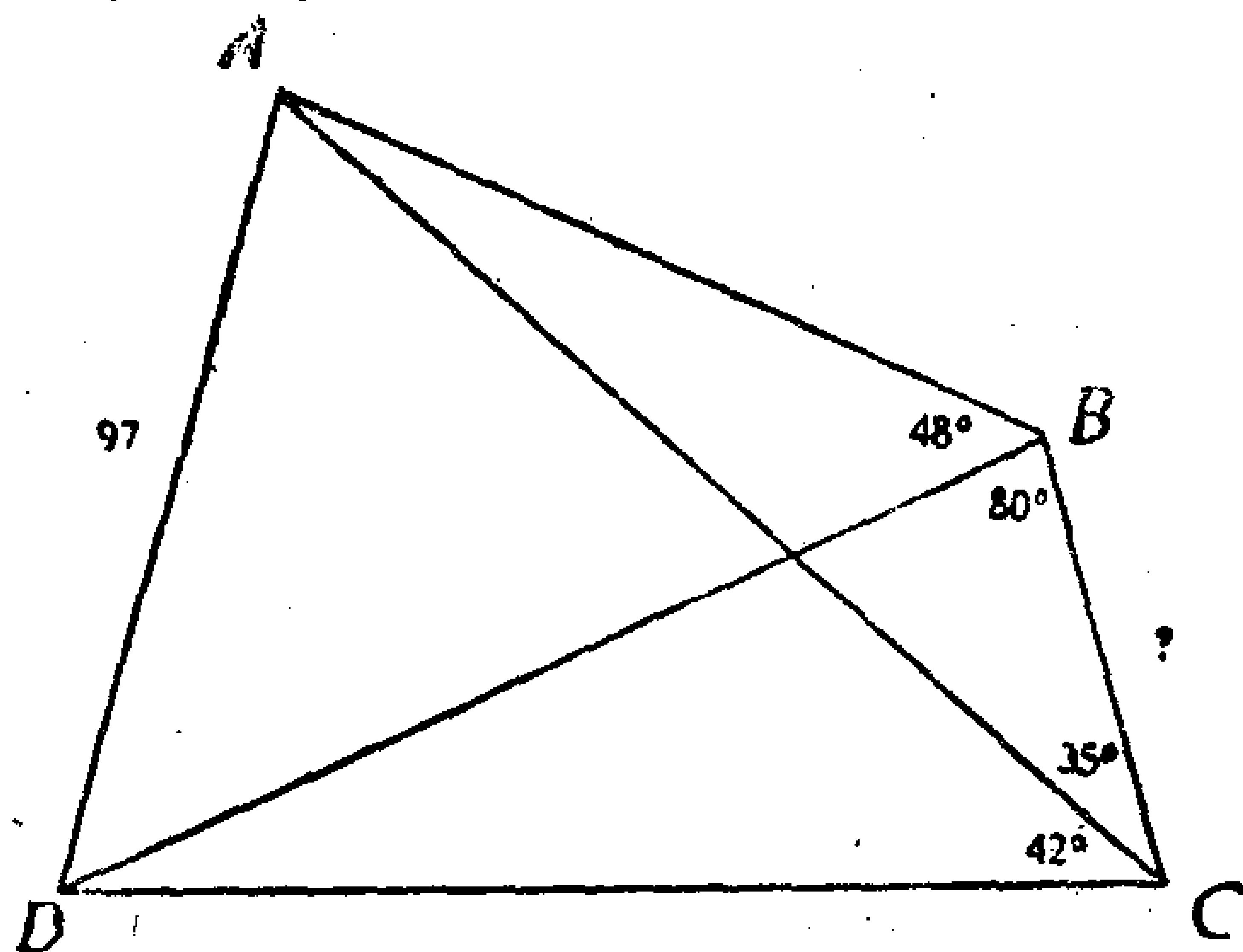


图51

① 伦敦西郊著名植物园.——译注
② 出处不详，可能是凯亚姆的《儒拜雅集》中的一段.——译注

长。用假置法，取BC为任何适当的长度，例如1单位，然后由此据正弦定律算出BA与BD，再据余弦定律算出AD，等等。（这是解这个问题最实用的方法，本质上就是一个好测量员可能使用的方法。）

14·3　在研究几何作图时，有一种与假置法相当的作图法，叫做"相似法"。这种方法在于作一个图形与所求图形相似，然后利用比例关系"放大"为正常大小。例如，假设我们要作已知三角形ABC的内接正方形，使得正方形的一条边位于该三角形的底边BC上（见图52）。首先，如图所示，作大小适当的一个正方形$D'E'F'G'$。如果F'落在AC上，问题就解决了，否则我们就解决了关于三角形$A'BC'$的这个问题。三角形$A'BC'$相似于三角形ABC，以B为相似中心，由此可见，直线BF'交AC于所

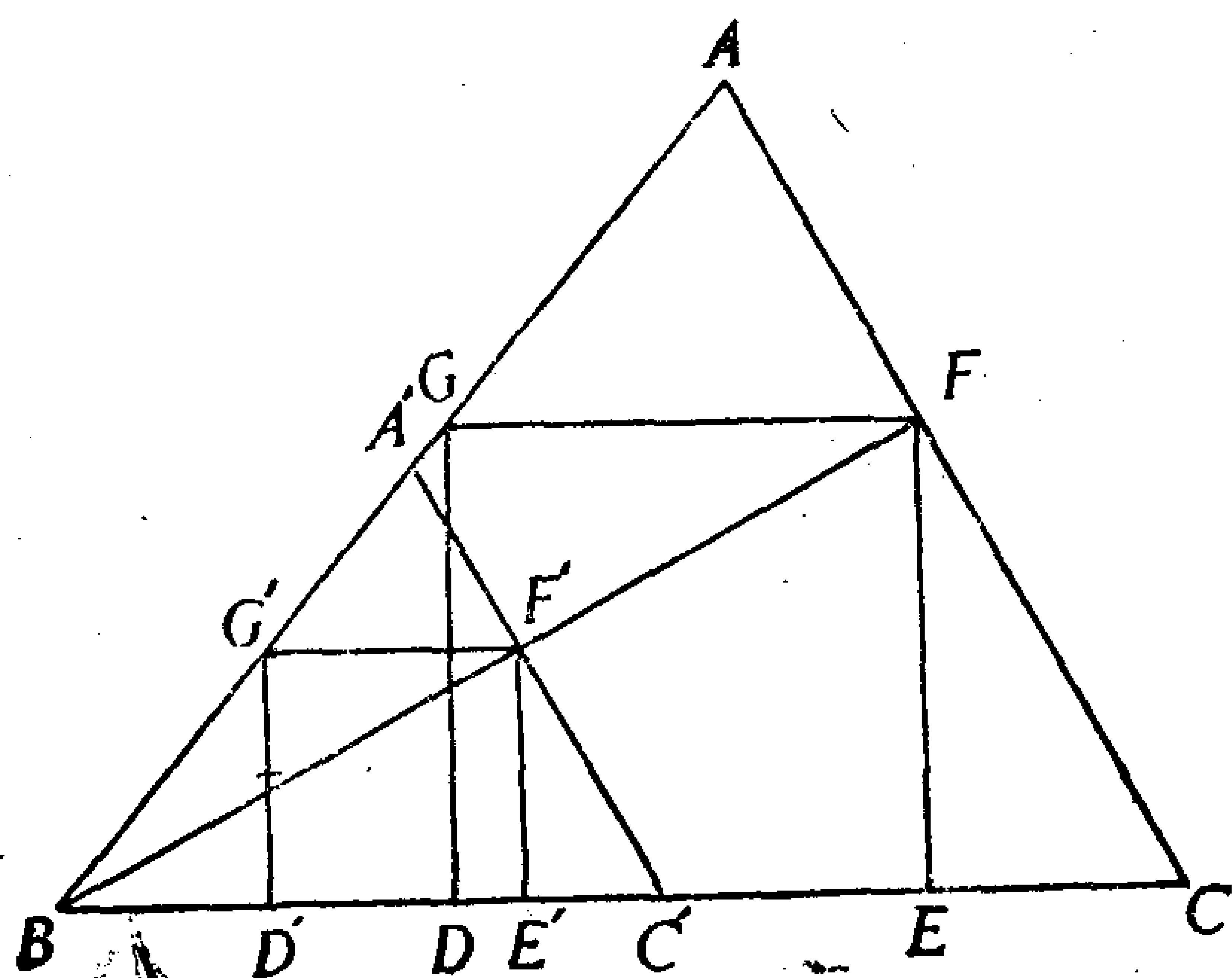


图52

求三角形ABC的内接正方形的顶点F。

试用相似法求线段DE，使得D在已知三角形ABC的边AB上，E在边AC上，且$BD=DE=EC$。

14.4 (a)有一个古巴比伦的问题：求正方形一边，使得正方形的面积减去其边长得870。这个问题的解法如下："取1的一半，即1/2；把1/2乘以1/2，即是1/4；把1/4与870相加，得到$870\frac{1}{4}$。最后这个数是$29\frac{1}{2}$的平方。现在把$29\frac{1}{2}$加上1/2，结果是30，这就是所求正方形的边长。"证明：这个巴比伦解法正好等价于解二次方程

$$x^2-px=q$$

的代公式法

$$x=\sqrt{(p/2)^2+q}+p/2。$$

(b)另一古巴比伦文献载有二次方程

$$11x^2+7x=6\frac{1}{4}$$

的解法：先遍乘以11得到

$$(11x)^2+7(11)x=68\frac{3}{4},$$

再令$y=11x$把上式化为"正规形式"

$$y^2+py=q。$$

用代公式法解此方程得

$$y=\sqrt{(p/2)^2+q}-p/2。$$

最后得$x=y/11$。

证明：任何二次方程$ax^2+bx+c=0$都可以由一个相似变换化为下列一种正规形式：

$$y^2+py=q,\quad y^2=py+q,\quad y^2+q=py,$$

其中p与q都是非负数。就我们所知，解这些三项二次方程是古埃及人力不胜任的。

14.5 (a)已经发现一件古巴比伦碑文，载有从$n=1$直到30的n^3+n^2的值。编制从$n=1$直到10的这种值表。

(b)利用上面的表求三次方程$x^3+2x^2-3136=0$的一个根。

(c)公元前1800年左右巴比伦人有一个问题，似乎是要解联立方程组

$$xyz+xy=7/6,\quad y=2x/3,\quad z=12x.$$

试用问题（a）的表解此方程组。

(d)O。诺厄格鲍尔（生于1899年）认为，古巴比伦人完全能够把一般的三次方程化为"正规形式"$y^3+y^2=c$，虽然还没有证据说明他们确实做到了这一点。试说明如何进行这样的简化。

14.6 已知长度为a，b，c的线段，试用圆规直尺作长度为$m=a^3/bc$的线段。

14.7 (a)利用凯亚姆方法从几何上求三次方程$x^3+2x+8=5x^2$的正根。

(b)把这种方法稍加引伸求负根。

14.8. (a)说明不完全三次方程$ax^3+bx+c=0$

可以从下述几何考虑求其实根：在笛卡尔直角坐标架上画出三次曲线$y=x^3$及直线$ay+bx+c=0$。

(*b*)用问题(*a*)的方法解三次方程$x^3+6x-15=0$。

(*c*)用几何方法解三次方程$4x^3-39x+35=0$。

(*d*)证明：任何完全三次方程$ax^3+bx^2+cx+d=0$可以用代换$x=z-b/3$化为变数z的不完全方程。

(*e*)用几何方法解三次方程$x^3+9x^2+20x+12=0$。

有趣的是，不完全或完全三次方程可能具有的复虚根也可以用几何方法求得，例如见 Arthur Schultze, *Graphic Algebra* (New York, Macmillan Company, 1922)，§58，§59，§65。

进一步的读物

Coolidge, J. L., *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.

十五、愚讯

费波那契及其《筹书》

（公元1202年）

印度阿拉伯数字系统之所以在西欧得到传播与普及，主要是因为出版了鼓吹与倡导这种新数字的某些著作。

我们知道的最古老的阿拉伯算术著作是阿夸锐兹米的著作（约在公元825年），后来才有了其他作者写的一些阿拉伯算术著作。这些算术著作中有仿照印度格式提出的印度数字演算法则，还有检验算术计算的所谓“舍九法”，以及“假置法”、“双假置法”，即是某些代数问题的非代数解法。这些著作中往往还阐述了平方根与立方根、分数以及“三项律”。①

阿夸锐兹米论述印度数字用法的著作产生了一个通用的数学用语：该书原本现已荡然无存，但1857年却发现了一件拉丁文译本，开头一句话是

① 即比例的两个中项之积等于两个外项之积，因此给了任何三项就可求出其余一项．——译注

"Algoritmi说……，"这是把阿夸锐兹米这个名字 *al-Khowârizmî* 变成了 Algoritmi，后来就由此派生出英语中现在的"算法"一词 algorithm，意谓按某种特定方式进行的、正规的演算程序。

有趣的是，还有一个通用的数学用语，即是"代数"这个词algebra，也是由于阿夸锐兹米而出现的。这个词来自阿夸锐兹米有关该主题的一件著作的标题 *Hisâb al-jabr w'al-mugâbalah*，照字面直译是"合并相抵论"，也可以意译为"移项消去论"*。该书原本尚存，有了拉丁文译本后便在欧洲驰名，结果欧洲人在很长时期内把 al-jabr 即 algebra这个词当作"方程论"的同义词使用。

阿拉伯语里的al-jabr这个词还有一种非数学的意义，那是西班牙的摩尔人①引入欧洲的。西班牙语里的algebrista是指正骨师（骨折复位师），那时的理发师通常自称为 algebrista，因为正骨和放血是中世纪理发师的副业。理发师的这个老行当反映在今天理发店那熟悉的红白条相间的圆柱标记上。

现在让我们回来再讲在传播印度阿拉伯数字系

---

* 消去方程两端相同的项以及把一项变号从一端移到另一端，这些运算是古代代数学的基本法则．——原注

① 指公元八世纪至十三世纪进入西班牙等地区实行统治的阿拉伯人．——译注

统中某些有影响的著作，其中最有影响的是一部称为《筹书》的著作，那是1202年在意大利出版的。这部著作是一件“数学史菁华”，本讲主要就是讨论这部著作。

《筹书》的作者是勒欧拉多·费波那契（“波那契之子勒欧拉多”，1175—1250？），他是中世纪最有才华的数学家，生于商业城市比萨，所以也称为比萨城的勒欧拉多（或比萨人勒欧拉多）。他的父亲在比萨有商业联系；当时意大利的许多大商号都在地中海沿岸各地设有货栈，所以当他父亲在非洲北海岸的布热城担任海关管理人员时，就把小勒欧拉多带去了。父亲的职业使孩子从小对算术发生兴趣，后来费波那契还到过阿拉伯的一些港口，广泛游历埃及、西西里、希腊和叙利亚，接触到东方和阿拉伯的数学知识。费波那契深信印度阿拉伯演算方法的实用性独占鳌头，所以他回国以后不久，就在1202年出版了他的名著《筹书》。

《筹书》第一版现已荡然无存，我们能够见到的是1228年出版的第二版，该书是算术与代数的专著，显然受到阿夸锐兹米和阿布喀米尔等人的代数著作的影响，但实质上是一部独立的著作。该书详细说明了印度阿拉伯数字记法及其相应的演算法则，备加推重。该书共十五章，阐述了新数字的读法和写法、整数与分数的演算方法、平方根与立方

根的计算、线性方程及二次方程的假置解法与代数解法。方程的负根与虚根未予认可，代数推演是用文字叙述的；也讲了一些应用问题，涉及以物易物、合伙经商、混合平均以及几何测量。该书还搜集了大量的问题，后世几百年间的作者都以此作为材料的来源。不过，这部著作立竿见影的效果还在于传播了印度阿拉伯数字系统。

《筹书》中某些问题的性质可以从本讲所附练习中得到了解，现在我们来评述该书中两个特别有趣的问题。

《莱恩德古书》（约在公元前1650年）中大多数问题的考释没有什么困难，但有一个问题，即问题79，最初的解释是令人困惑不解的。该问题不过就是一组数据以及加法记号，现改写如下：

产　业

房屋	7
猫	49
鼠	343
麦穗	2401
赫卡特单位①	16807
	19607

容易看出，这些数是7的头五个方幂以及它们的和。因此，最初认为，古书作者可能是用“房屋”、“猫”等等象征性的用语来表示“一次幂”、“二

① 赫卡特（Hekat），容积单位名称，出处不详。——译注

次幂”等等。

可是，德国卓越的数学史家M.康特（1829—1920）于1907年提出了一个解释，更加合乎情理，更加引人入胜。他认为这个问题是中世纪曾经流传而且是费波那契在其《筹书》中提到的一个问题的古代说法。费波那契的提法如下：“七妪赴罗马，每妪驱七骡，每骡负七橐，每橐装七馍，每馍配七刀，每刀套七鞘。试问：妪、骡、橐、馍、刀、鞘共赴罗马总数几何？”后来这个问题有一个更熟悉的说法，那是一首古英语的儿歌：

我赴圣艾维斯城，
途逢一夫率七妻
每妻携七囊，
每囊容七猫，
每猫有七仔，
仔猫囊妻共几何？

于是，按照M.康特的解释，《莱恩德古书》中原来的问题可以陈述如下：“一份产业包括七所房屋，每所房屋有七只猫，每只猫吃掉七只老鼠，每只老鼠吃掉七枝麦穗，每枝麦穗可以长出七赫卡特的麦子。试问：这份产业里房屋、猫、鼠、麦穗以及麦子的赫卡特数总共是多少？”

这个问题可能是作为世界谜语集的内容而流传下来的。当抄写人阿蒙斯把它抄入《莱恩德古书》

时，显然已是老生长谈了；当费波那契把它的一种说法编入《筹书》时，已将近有三千年的历史了。后来差不多又过了八百年，我们才给孩子们讲另一种说法。人们不禁想问：象古英语儿歌里那样意想不到的变化是否在古埃及的问题里就可能已经有了，可是，这种变化很可能是盎格鲁撒克逊人①的贡献。

我们现在的一些刊物上不时蹦出来的许多智力问题在中世纪都有其相应的说法，其中有些问题可以上溯多久现在是几不可考了*。

我们现在来讲《筹书》中第二个特别有趣的问题，可能是该书中最有影响的问题了，摘录如下："如果每一对兔子按月生产一对新兔子，这对新兔第二个月起开始繁殖，试问：一对兔子一年能繁殖出几对兔子？"①不用费多大劲就可以证明：这个问题最后产生下面这个有趣的数列（诸项是逐月出现的兔子对数）：

$$1, 1, 2, 3, 5, \cdots, x, y, x+y, \cdots$$

---

① 泛指古代英国人。——译注

* 见D. E. Smith, *On the Origin of Certain Typical Problems*, Amer. Math. Monthly, vol. 24 (1917), pp. 64-71. —原注

① 这里还应加上一个重要的条件，即每对兔子只生产两次，否则不能得到下面的数列。例如，在得到1，1，2后总共已有四对兔子，如果最初一对兔子继续生产，过一月后，总共将生产四对兔子，而不是三对。——译注

其中头两项是1，然后以后各项就是前面紧邻的两项之和。这个数列称为**费波那契数列**。不期而遇的情况多得惊人：可以应用于分解问题（例如把一个正方形分解为不相等的若干正方形）、工艺问题、蜜蜂繁殖问题、植物叶序问题，而且是数学各个场合的不速之客。

就拿向日葵的种子柄头来说，种子处于菱形小囊中，这些小囊的周界是自柄头中心向外界发散的螺旋线的弧围成的，如图53所示。这里有一个奇妙

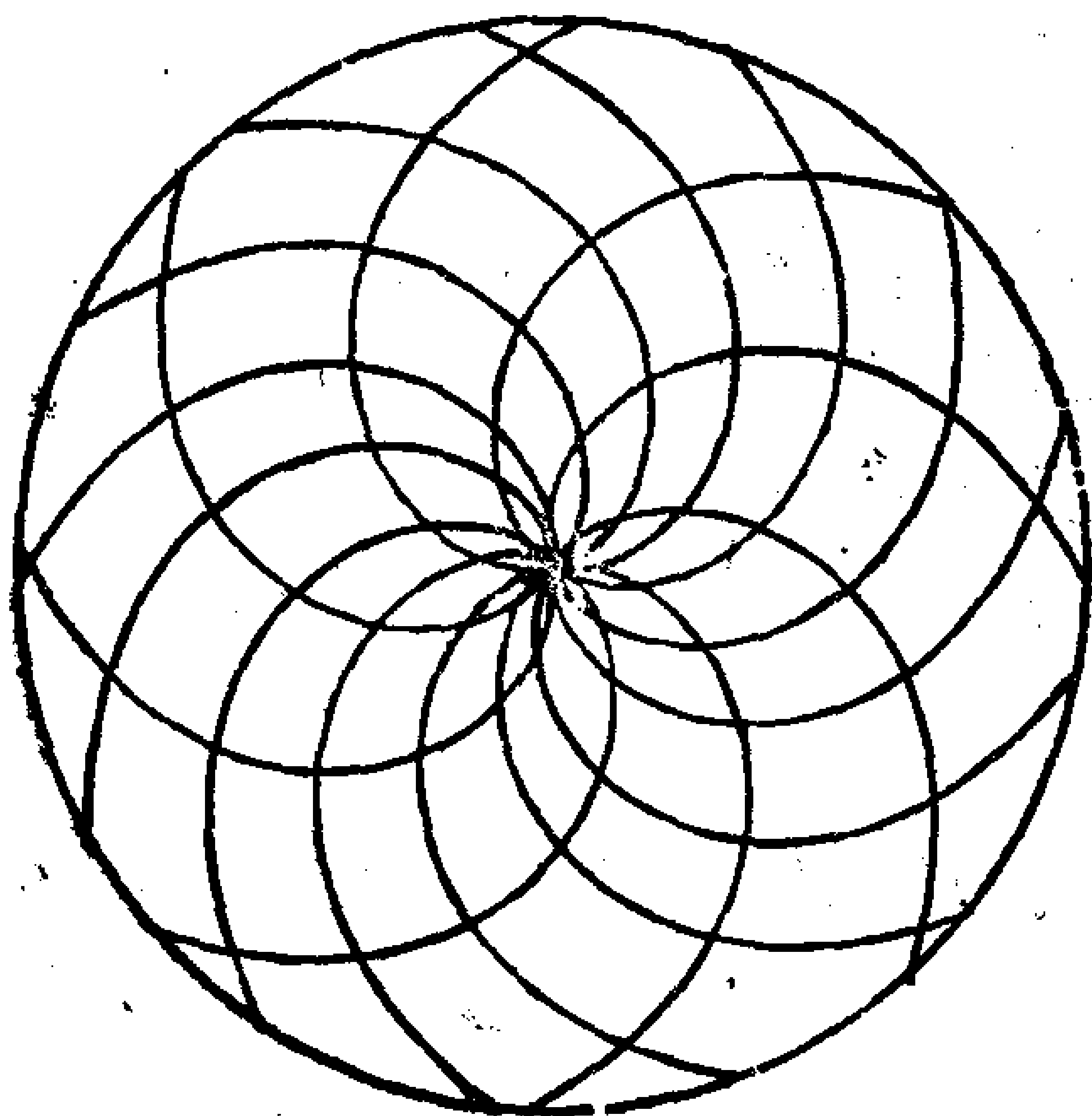


图53

的现象：如果数一下顺时针螺旋线的条数，再数一下反时针螺旋线的条数，就会发现这两个数正好是费波那契数列中相邻的两项。实际上，任何菊科花朵（例如雏菊或翠菊）的种子柄头都是如此，向日葵不过是由于种子和柄头都很大，容易检验罢了。顺便说一下，还有一个奇妙的现象：上面提到的那些螺旋线都是对数螺旋线。

其次，再来看植物茎部侧面长出的叶子（或嫩芽或枝条）。如果我们事先在茎底附近的某片叶子上做个标记，然后沿着茎部向上数一下叶片数，一直数到正好在原来那片叶子上方①的一片叶子为止，那么这个数通常是费波那契数列的一项。此外，如果我们沿着茎部向上数一下要绕茎部转多少圈才能到达正好在原来叶片上方的那片叶子，那么这个数通常是费波那契数列中前面那个交错项。在形形色色的植物形态中都有类似的情况，例如莴笋头柄的叶片、洋葱的层次、松果上的圆锥螺旋线，等等。

如果我们考虑费波那契数列相邻两项之比构成的数列，即

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13}\cdots,$$

---

① 注意，植物叶片在圆柱形茎部侧面上是旋转向上分布的，这里是指在同一条经线上的叶子。——译注

那么可以从数学上证明：这个比值数列的极限值是

$$r=(\sqrt{5}-1)/2,$$

这就是第五讲讨论过的著名的**黄金比值**。因此，自然界似乎总是条条道路通向黄金比值。

费波那契数列在数学各部分都有许多意想不到的用处。例如，利用**辗转相除法*** 的计算程序来求两个已知正整数的最大公约数时，要进行一定量相继的除法，因此自然要问：是否可以事先确定除法次数的界限？答案就是G．拉梅（1795—1870）的下述优秀定理：**求两个正整数的最大公约数，所需除法的次数决不大于二数中较小一数的位数的五倍。**这个定理的证明主要是利用费波那契数列的某些性质！①

有关这个无处不在的费波那契数列及其性质的文献已是汗牛充栋，而且还在继续增长，那些引人入胜的关系，就象三角形的几何性质一样，似乎是取之不尽的。事实上，1963年，以Jr．V．浩格特博士为首的一群费波那契数列迷成立了“费被那契协会”，开始出版一份刊物《费波那契季刊》，主要是发表费波那契数列以及有关数列的研究文章。这份刊物问世头三年就发表了这个特殊领域中将近

---

* 见第八讲练习8.4.——原注

① 见《数学瑰宝》第二辑，七，四川教育出版社出版。——译注

千页研究文章；1968年，该刊出了三期增刊，不遗余力，总算多少处理了那大批的积压稿件。这种狂热的活动还在有加无已。

费波那契除了《筹书》以外还写过另一些著作，例如，1220年出版了他的《几何实践》，广泛收集了有关几何及三角的材料，论证巧妙、严格而且独具匠心；约在1225年，费波那契写了他的《求积篇》，这是有关不定分析的一部精采而独到的著作，使他跻身于刁番图与费马之间，成为该领域中独步一时的数学家。他的这些著作是当时大多数学者望尘莫及的。

费波那契的数学才能受到西西里的诺曼王国弗雷赘克国王这位学术倡导者的注意，结果，费波那契应召入朝，参加一次数学比赛。国王的一个侍从、帕勒莫城的宙王尼①出了三道题，费波那契全都解决了，这次大显身手使他声誉鹊起。

第一个问题是求有理数x，使得x^2+5和x^2-5都是有理数的平方。费波那契的答案是$x=41/12$，答案正确，因为$(41/12)^2+5=(49/12)^2$，而$(41/12)^2-5=(31/12)^2$。这个解答后来收入《求积篇》。

第二个问题是解三次方程

① 帕勒莫为西西里岛西北部城市。这里的宙王尼原文是John，这是意大利人名Giovanni的英语通译，今从意大利文。——译注

$$x^3+2x^2+10x=20.$$

费波那契试图证明：该方程的根不能表为形如 $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$ 这种无理形式，换句话说，方程的根不能用圆规直尺作图。然后他得到一个近似解，用十进位记法就是

$$1.3688081075,$$

精确到小数点后九位。这个解答后来发表在费波那契的一件题为《花团锦簇》的著作里，未附任何说明，所以费波那契是如何求出这个解答的，确实使人大惑不解。

第三个问题最容易，也载入《花团锦簇》。问题如下：“三人拥有钱币一堆，其应得份额为1/2，1/3，1/6。每人先从中各取若干，取尽无余。然后甲退回所取1/2，乙退回1/3，丙退回1/6，所退总额三人均分，结果每人适得其应得之份额。试问：原有钱堆为数几何？各人最初从中所取几何？”费波那契对此问题的解法实质如下。设s表示原来的总额，$3x$表示退回的总额。各人收到退回总额的三分之一以前，所持数额分别为$s/2-x$，$s/3-x$，$s/6-x$，这三个数也就是他们退回最初所取的1/2，1/3，1/5后持有的数额，所以最初所取数额分别是$2(s/2-x)$，$(3/2)(s/3-x)$，$(6/5)(s/6-x)$，三数相加，其和为s，从而得到$7s=47x$。这是一个不定

问题，费波那契取$s=47$，$x=7$。于是，三人最初从钱堆中所取的数额为33，13，1。

费波那契在其著作上的署名有时用*leonardo Bigollo*。但是*Bigollo*有两个意思，可以表示“旅游者”，也可以表示“愚氓”。费波那契署上这个名字可能是说，他是一位旅游家，因为他确实如此。但是流传的一则轶事说，他很乐意使用这个署名，理由是当时有些人说他是愚氓（由于他醉心于新的印度阿拉伯数字），而向那些信口雌黄的人显示一个愚氓所能取得的成就，则是他的赏心乐事。

练习

15·1 (*a*) 证明：一个自然数的各位数之和除以9，以及这个数本身除以9，所得余数相同。

从已知自然数除以整数n得到余数的运算称为“舍去n”。上述定理表明。舍去9特别容易。

(*b*) 一个已知自然数除以9所得余数称为这个自然数的盈数。证明下列两个定理：（1）和的盈数等于诸被加数的盈数之和的盈数；（2）二数之积的盈数等于此二数盈数之积的盈数.

根据这两个定理，可以利用舍九法来检验加法和乘法的结果。

(*c*) 把478与993先相加，后相乘，用舍九法

检验结果。

15·2 (a) 证明：如果把一个自然数的各位数字任意重排构成一个新数，那么新老两数之差被9整除。

据此可以进行账目复核：如果复式簿记中借贷双方之和不等，这两个和数之差又被9整除，那么错误很可能是由于把借方或贷方记入账本时数字移位引起的。

(b) 解释下述数字把戏：请你想好一个数，把各位数字次序颠到得到一个新数，从大的减去小的，把差数乘以随意的一个数，从乘积中剔除任何一个非零数字，最后说出结果；这时我就可以猜出你剔除的那个数字，即是9减去你宣布的那个结果的盈数。

15.3. 求方程近似实根最老的一个方法就是所谓regula duorum falsorum，我们经常叫做**双假置法**。这个方法似乎起源于印度，后来阿拉伯人加以采用。现代形式的简单提法是这样：设x_1和x_2是两个数，与方程$f(x)=0$的实根x相近，且各在其一侧，于是点(x_1, $f(x_1)$)和(x_2, $f(x_2)$)的联线与x轴的交点就给出所求实根的近似值x_3（见图54）。证明

$$x_3=\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}.$$

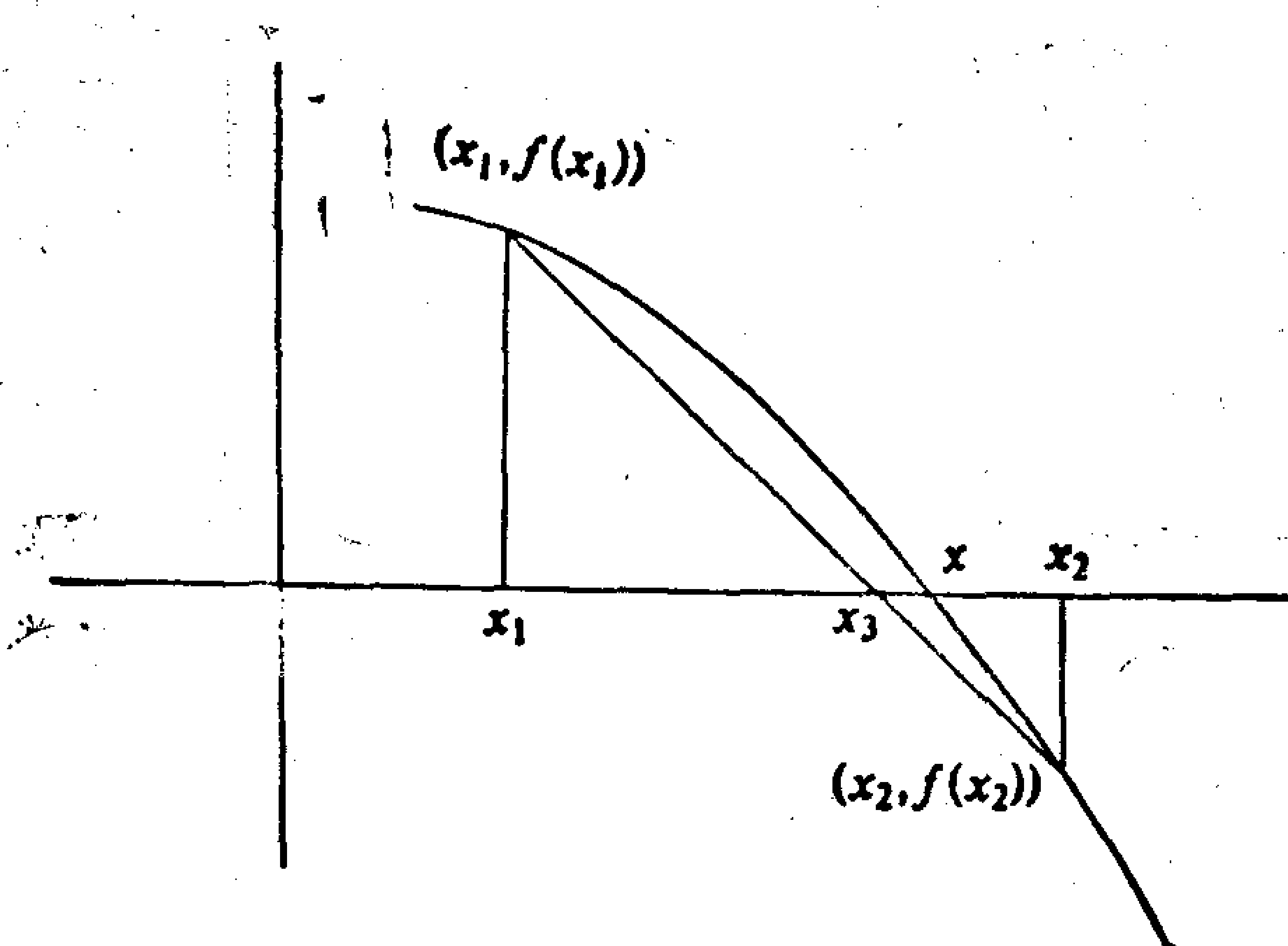


图54

这个方法现在又可以应用于适当的一对数x_1，x_3或x_3，x_2了。

15•4　(*a*) 用双假置法计算方程$x^3-36x+72=0$在2与3之间的实根，精确到小数点后三位。

(*b*) 用双假置法计算方程$x-\tan x=0$在4.4与4.5之间的实根，精确到小数点后三位。

15•5　从《筹书》中关于兔子繁殖的那个问题得出费波那契数列。

15•6　如果u_n表示费波那契数列的第n项，证明：

(*a*) $u_{n+1}u_{n-1}=u_n^2+(-1)^n$，$n\leqslant 2$。

(*b*) $u_n=[(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n]/2^n\sqrt{5}$。

(c) $\lim_{n\to\infty}(u_n/u_{n+1}) = (\sqrt{5}-1)/2$。

(d) u_n与u_{n+1}互素。

15.7. 解《筹书》中的下列问题。头一个问题是君士坦丁堡的一位学究向费波那契提出的，第二个问题的目的是为了说明三项律。

(a) 如果A从B处得到 7 个德纳柔①，则A的钱数为B的钱数的五倍；如果B从A处得到 5 个德纳柔，则B的钱数为A的钱数的七倍。试问每个人各有多少钱？

(b) 某国王派30人至果园植树。如果这些人 9 天能植树1000株，那么36人植树4400株需几天？

15•8 解《筹书》中的下述问题，这是后来许格和欧拉著作中提出的遗产问题的例子。

某人遗留给其长子一个贝珍特② 以及所余的七分之一，然后再从剩余部分中留给次子两个贝珍特以及所余的七分之一，接着从新的剩余部分中留给三子三个贝珍特以及所余的七分之一。他继续这样留给每个儿子的贝珍特比前一个儿子多一个，再加上所余的七分之一。结果，按照这种分法，最小的儿子得到剩下的全部财产，而且所有的儿子所得份

① 古罗马钱币名。——译注

② 古代拜赞庭帝国金币名——译注

额都相等。试问：某人有几个儿子，财产有多少？

15·9 证明：

$$a^2-2ab-b^2,\quad a^2+b^2,\quad a^2+2ab-b^2$$

这三个数的平方成等差数列。如果$a=5$，$b=4$，则公差为720，而第一个平方数是$41^2-720=31^2$，第三个平方数是$41^2+720=49^2$。除以12^2我们得到费波那契对第一个比赛问题的解。问题中的5如果换成1，2，3或4，则问题无解。费波那契曾证明：如果x与h都是整数，使得x^2+h和x^2-h都是完全平方，则h必被24整除。例如，我们有$5^2+24=7^2$，$5^2-24=1$以及$10^2+96=14^2$，$10^2-96=2^2$。

15·10 解费波那契在其《算书》中提出的下述问题。这个问题后来有种种不同的提法，其内容实质上就是年金的观念。

一人经过七道门进入果园，摘了若干苹果，离开果园时他给第一个看门人他摘的苹果之半外加一个，给第二个看门人所余苹果之半外加一个，对其余五个看门人也都如法处理，结果出果园后还剩下一个苹果，试问：他在果园摘了多少苹果？

进一步的读物

Hoggatt, V. E., Jr., *Fibonacci and Lucas Numbers*, Boston: Houghton Mifflin, 1969.

Sullivan, J. W. N., *The History of Mathematics in Europe from the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour*. New York, Oxford University Press, 1925.

十六、一个稀奇古怪的故事

三次及四次方程的代数解

（公元1554年）

第十四讲中我们曾经谈到波斯的诗人数学家O. 凯亚姆如何用几何方法求解三次方程，本讲中我们将会看到，差不多过了500年，意大利的数学家们才终于找到了三次方程的代数解法，过后不久，又找到了四次方程的代数解法。这些成就接踵而至，在数学史上蔚为壮观，是两件"数学史菁华"。传说中有些光怪陆离的成分，有些角色也是整个数学史上最为罕见的。

简言之，情节似乎是这样。1515年左右，波隆尼亚[①]大学数学教授S. 德费柔（1465—1526）对于没有二次项的三次方程，即形如$x^3+mx=n$的三次方程，获得代数解法，他的工作很可能是依据古阿拉伯人的资料。他没有把他的发现公诸于世，而是作为一个秘密透露给他的学生A. M. 费欧尔。后

① 意大利北部城市。——译注

来，1535年左右，N. 冯塔那（约1499—1557，通称塔塔里亚〔叽里咕噜〕，因为幼年受伤影响了说话能力）声称对于没有线性项的三次方程，即是形如$x^3+px^2=q$的方程，找到了代数解法。费欧尔认为这不过是大吹法螺耸人听闻罢了，便向塔塔里亚提出挑战，公开比赛，在一定时间内解若干个三次方程，由比赛双方在规定的比赛时刻向对方提出，数目同等。塔塔里亚接受了挑战，发愤图强，到规定的日期前几天就找到了没有二次项的三次方程的代数解法。参加这一比赛要有能力解两种三次方程，费欧尔只能解一种方程，所以塔塔里亚取得完全的胜利。后来，一个在米兰①教数学又行医的无耻之尤G. 卡大诺（1501—1576）向塔塔里亚指天誓日决不泄密，骗取了三次方程解法的关键。1545年，卡大诺在德国纽伦堡出版了他的《大法》一书，这是一部重要的拉丁文代数著作，其中登峰造极的部分就是塔塔里亚的三次方程解法。塔塔里亚提出了强烈的抗议，但遭到卡大诺最能干的学生L. 费尔拉锐（1522—1565）的反击，他争辩说，卡大诺是通过第三者从德费柔那里获悉这一解法的，反而谴责塔塔里亚剽窃了同样的资料。接踵而来的是一场猛烈的争吵，结果塔塔里亚侥倖获保首领而归。

① 意大利北部城市。——译注

这个故事的某些细节有种种不同的说法，因为这出闹剧中的那些角色似乎并不总是尊重事实真相的。

卡大诺在其《大法》中对三次方程 $x^3+mx=n$ 给出的代数解法，其实质如下。考虑恒等式

$$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3.$$

如果取a与b使得

$$3ab=m,\quad a^3-b^3=n$$

则 x 由$a-b$给出。对上面两个方程求解a与b，得到

$$a=\sqrt[3]{(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}},$$

$$b=\sqrt[3]{-(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}},$$

所以x就由所谓的**卡大诺及塔塔里亚公式确定**：

$$x=\sqrt[3]{(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}}-\sqrt[3]{-(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}}.$$

此外，一般的三次方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

通过变换 $x=z-b/3a$ 可以变成

$$z^3+mz=n$$

的形状，所以上述解法也就可以解所有的三次方程。

一般的三次方程获得代数解法之后不久，一般的四次方程（或称双二次方程）也找到了代数解

法．1540年，意大利数学家Z．de T．达寇依向卡大诺提出下述问题："把10分成三份成连比，头两项之积为6．"如果把这三份记为a，b，c，则有

$$a+b+c=10,\quad ac=b^2,\quad ab=6.$$

容易看出，消去a和c得到四次方程

$$b^4+6b^2+36=60b.$$

卡大诺没有办法解这个方程，可是他的学生费尔拔锐解出来了，他想出一个办法可以求解形如

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

的任何四次方程，而一般的四次方程经过一个简单的线性变换就可以化为上述形式。从上述四次方程得到

$$x^4+2px^2+p^2=px^2-qx-r+p^2$$

即

$$(x^2+p)^2=px^2-qx+p^2-r,$$

所以对任何y有

$$\begin{aligned}(x^2+p+y)^2&=px^2-qx+p^2-r+2y(x^2+p)+y^2\\&=(p+2y)x^2-qx+(p^2-r+2py+y^2).\end{aligned}$$

现在取y使得这个方程右端成为完全平方，即*

$$4(p+2y)(p^2-r+2py+y^2)-q^2=0.$$

* 二次函数Ax^2+Bx+C是一个线性函数的平方，其充要条件为$4AC-B^2=0$。——原注

但这个条件是 y 的三次方程，所以可以用前述方法求解。这样一个 y 值就使原来的问题化为一个无非是求平方根的问题罢了。

卡大诺也是兴致勃勃地把费尔拔锐的四次方程解法收入了他1545年的《大法》一书中。

过了不久，一般的三次和四次方程又有了另一些代数解法。本讲末尾我们还要讲十六世纪的数学家F。维埃特（1540—1603）发明的那些解法（过世以后发表，1615年），以及R。笛卡尔（1596—1650）于1637年提出的四次方程解法。不过，目前为了增添一些兴味，让我们讲一点有关三次方程代数解法史话里两位主角卡大诺和塔塔里亚的传记材料。

G。卡大诺是数学史上最为怪诞的人物之一，1501年生于帕维亚①，是一位法官的私生子，成年之后性情喜怒无常，他一面行医，一面兼搞数学研究、教学及著述。游历苏格兰后，他相继在帕维亚大学和波隆尼亚大学占据重要位置。他当过占星家开业算命，一度由于异端邪说而锒铛入狱，因为他竟然斗胆包天发表了基督命运星占图。后来他辞去波隆尼亚的职位，迁居罗马，当了占星家，声誉显扬。说来也怪，由于他当初因异端邪说而身陷囹圄，竟然作为罗马教廷的占星家得到一笔恩俸。1576年他自戕于罗马，据传是为了使他早年对其死

① 意大利北部城市。——译注

期的占星术预言得以应验。有很多传说谈到他的脾气暴躁，例如，他的小儿子有一次吵得他心烦意乱，他勃然大怒，竟然割掉了那孩子的两只耳朵。他树敌太多，有些故事很可能是他顶撞过的那些人夸大其词肆意渲染的结果。因此，他可能受到过分的诽谤，这个看法当然是以他的自传佐证的。

卡大诺作为当时最有才华的多面手，写过许多著作，涉及算术、天文学、物理、医学以及其他学科。他的鸿篇巨制是其《大法》一书，这是专讲代数的第一部杰出的拉丁文著作，其中讲到方程的负根，也谈到虚数的运算，还有求多项式方程实根近似值的一种粗糙的方法，有些证据说明他熟悉笛卡尔的“正负号规则”，这在今天大专院校的代数课程里有时还会碰到。卡大诺也是一个积重难返的赌棍，写过一本赌徒指南的书，其中还有某些有趣的概率问题。

塔塔里亚于1499年左右生于布雷沙①，童年生活艰难困苦。当法国人1512年夺取布雷沙时正当少年，随之而来的是一场残暴的屠杀，塔塔里亚和他的父亲（该城的邮递员）偕众逃入教堂避难，可是法国兵穷追不舍，结果圣墙之内血肉横飞：父亲被杀，孩子头骨破裂，上下颚被砍出一条大口子，委

① 意大利北部城市。——译注

地待毙。后来，孩子的母亲来到教堂寻找家人，发现丈夫已死，儿子还活着，她终于设法把儿子弄走；由于没有条件请医生治疗，她想起了受伤的狗总是舔伤口，所以就给孩子舔伤。后来塔塔里亚把幸免于死归功于这种原始的治疗，但是颚骨的损伤造成了他终身的语言缺陷，由此才得到他那"叽里咕噜"的绰号。后来他母亲想方设法攒够了钱，把他送进学校读了十五天，他充分利用了这次微小的机会，顺手牵羊拿走了一本习字帖，后来他就凭这个自学，读书写字。据说，他没有钱买写字纸，便奔向墓地以碑石当石板写字。后来他一生在意大利各城市教数学和其他科学谋生。塔塔里亚1557年逝于威尼斯。

塔塔里亚是一位有才华的数学家。除了有关三次方程的工作以外，他也许还是第一个把数学用来研究炮火射击的人。他写的一部（两卷）算术著作一般认为是十六世纪意大利的上品，详细论述了数值运算以及当时商业上的惯用算法。他还出版过欧几里德和阿基米德的著作。

1572年，即卡大诺去世前几年，R. 勃恩贝尔利（约1526—1573）出版了一部代数著作，对于有关三次方程的知识做出进一步的贡献。有关方程论的一些教本中已经证明：三次方程$x^3+mx=n$的三个根如果都是实数，并且都不是零，则表达式

$$(n/2)^2 + (m/3)^3$$

为负。因此，卡大诺及塔塔里亚公式所表示的该三次方程的实根就是两个复虚数的立方根之差。但是，当时对虚数没有什么了解，利用虚数表示实根这一异常情况使当时的代数学家相当头痛。勃恩贝尔利曾经指出（用现代语言来说）：由于两个立方根式中的被开方数是共轭虚数，所以这两个立方根也必定是共轭虚数，因而其和为实数①．但是，只要你想用代数方法求卡大诺及塔塔里亚公式中两个虚数的立方根，其结果不过就是化为正好是原来要求解的那个三次方程．只要三个根都是非零实数，总是碰到这条死胡同．因此这种情况曾经叫做“不可约情形”．这里虽然得到了三次方程实根的表达式，但这个表达式的实际效果却无济于事．这条死胡同后来由于利用了三角学方法才得以绕过．

读者还会记得第十二讲中谈到，勃恩贝尔利也为代数记法的演变出过力．

后来的作者又对三次和四次方程提出了另一些稍许不同的代数解法．例如，F．维埃特曾经对三次方程

$$x^3 + 3ax = 2b$$

提出过一个精巧的解法；任何三次方程都可以化为

---

① 这里是说把卡大诺及塔塔里亚公式右端第二个根式前的负号移入根号内而使整个右端成为两个共轭复数之和．——译注

上述形式。维埃特的解法如下，那是1615年他逝世以后发表的。令

$$x=\frac{a}{y}-y,$$

该三次方程化为

$$y^6+2by^3=a^3,$$

这是y^3的二次方程，所以可以求得y^3，然后再求得y，再求得x。维埃特对四次方程的解法与费尔接锐的解法相似。考虑“缺项”四次方程

$$x^4+ax^2+bx=c;$$

任何四次方程都可以化为上述形式。把上述方程写成

$$x^4=c-ax^2-bx,$$

两端加上$x^2y^2+y^4/4$得到

$$(x^2+\frac{y^2}{2})^2=(y^2-a)x^2-bx+(\frac{y^4}{4}+c).$$

选取适当的y，使右端成为完全平方，这个条件就是

$$y^6-ay^4+4cy^2=4ac+b^2,$$

这是y^2的三次方程，是可以求解的，所以原问题最后化为求平方根的问题了。

笛卡尔1637年对缺项四次方程

$$x^4+bx^2+cx+d=0$$

提出的解法利用了**待定系数法**。令方程左端等于乘

积

$$(x^2+kx+h)(x^2-kx+m)\ ,$$

使所得方程两端相应系数相等，得到有关k，h，m的三个关系式，由此消去h和m得到k的六次方程，这个方程可以视为k^2的三次方程，所以原四次方程的求解就化为一个相应的三次方程的求解。

既然可以使一般的四次方程的求解依赖于一个相应的三次方程的求解，所以1750年左右欧拉也试图把一般的五次方程的求解问题化为一个相应的四次方程的求解问题，但是他的尝试失败了，大约三十年以后拉格朗日也遭到同样的失败。后来，一位意大利医生P。儒费尼（1765-1822）于1803、1805和1813年对现在已是熟知的一个事实提出过没有说服力的证明，即一般的五次或更高次方程的根不可能由方程系数构成的根式来表示。这个重要事实是后来由著名的挪威数学家N。H。阿贝尔（1802-1829）于1824年独立证明的。最后指出，E。伽罗瓦（1811-1832）是在一次手枪决斗中丧生的，时年仅21岁，身后留下学术遗书一封，开启后发现，别的不说，其中就有用根式解代数方程的可能性判别法则。但是，这整个事情却是一个更近的“数学史菁华”。

练习

16·1 (*a*) 证明：变换$x=z-a_1/na_0$把n次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

变成z的n次方程，其中没有$n-1$次项。

(*b*) 据问题 (*a*)，变换$x=z-b/3a$把一般的三次方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

变成下列形式：

$$z^3+3Hz+G=0.$$

试用a，b，c，d表出H和G。

16·2 试推演卡大诺及塔塔里亚对三次方程

$$x^3+mx=n$$

的解法的各个步骤。

16·3 用卡大诺及塔塔里亚公式求出$x^3+63x=316$的一个根。

16·4 证明：1540年的达寇依问题产生四次方程$x^4+6x^2+36=60x$。

16·5 用费尔挼锐方法求出与练习16.4中的四次方程相应的三次方程。

16·6 试用卡大诺及塔塔里亚公式求解

$$x^3-63x=162,$$

这是不可约三次方程的一例。然后证明

$$(-3+2\sqrt{-3})^3=81+30\sqrt{-3},$$

$$(-3-2\sqrt{-3})^3=81-30\sqrt{-3},$$

由此可见，该公式给出的根是伪装形式的－6。

16·7 对于下列特殊的四次方程

$$13x^2=x^4+2x^3+2x+1,$$

卡大诺是在两端加上$3x^2$来求解的。试照此办理，求出该方程所有的四个根。

16·8 用维埃特方法求解$x^3+63x=316$。

16·9 用维埃特方法求出与四次方程

$$x^4+6x^2+36=60x$$

相应的三次方程。

16·10 (a) 推演笛卡尔1637年对缺项四次方程

$$x^4+bx^2+cx+d=0$$

求解的详细步骤。

(b) 用笛卡尔方法求出与四次方程

$$x^4-2x^2+8x-3=0$$

相应的三次方程。已知相应的三次方程有一个根是4，试求出原四次方程的所有四个根。

进一步的读物

Cardan, Jerome, *The Book of My Life*,

tr. by Jean Stoner. New York: Dover, 1963.

Ore, Orstein, *Cardano, the Gambling Scholar*, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1953.

SULLIVAN, J. W. N., *The History of Mathematics in Europe from the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour*, New York: Oxford University Press, 1925.

十七、天文学家延年益寿

内皮尔发明对数

（公元1614年）

1614年，住在爱丁堡①的一位苏格兰贵族发表了他早先做出的一项绝妙发明的详细报告，这一消息不胫而走。翌年，伦敦的一位数学教授经过书信往还之后，乘马车长途跋涉奔赴爱丁堡，对那位独具匠心的苏格兰人表示他的景仰之情。征途漫漫，风尘仆仆，他心驰神往，在日记里记下了他的游思浮想：那位贵族的头脑能够想出如此非凡的发明，他的前额该有多高！但是，旅途上意外的耽搁使他未能如期到达；那位贵族在爱丁堡望穿秋水，惘然若失，终于不无憾意地向一个朋友说道："嗐，约翰，教授不会来了。"正好就在这当口听到了敲门的声音，原来是有人把教授领到贵族跟前了。几乎有一刻钟他们默然相对，彼此一语不发，后来教授说："爵爷，我远道而来，专诚拜谒，是想知道您

① 英国城市，苏格兰首府。——译注

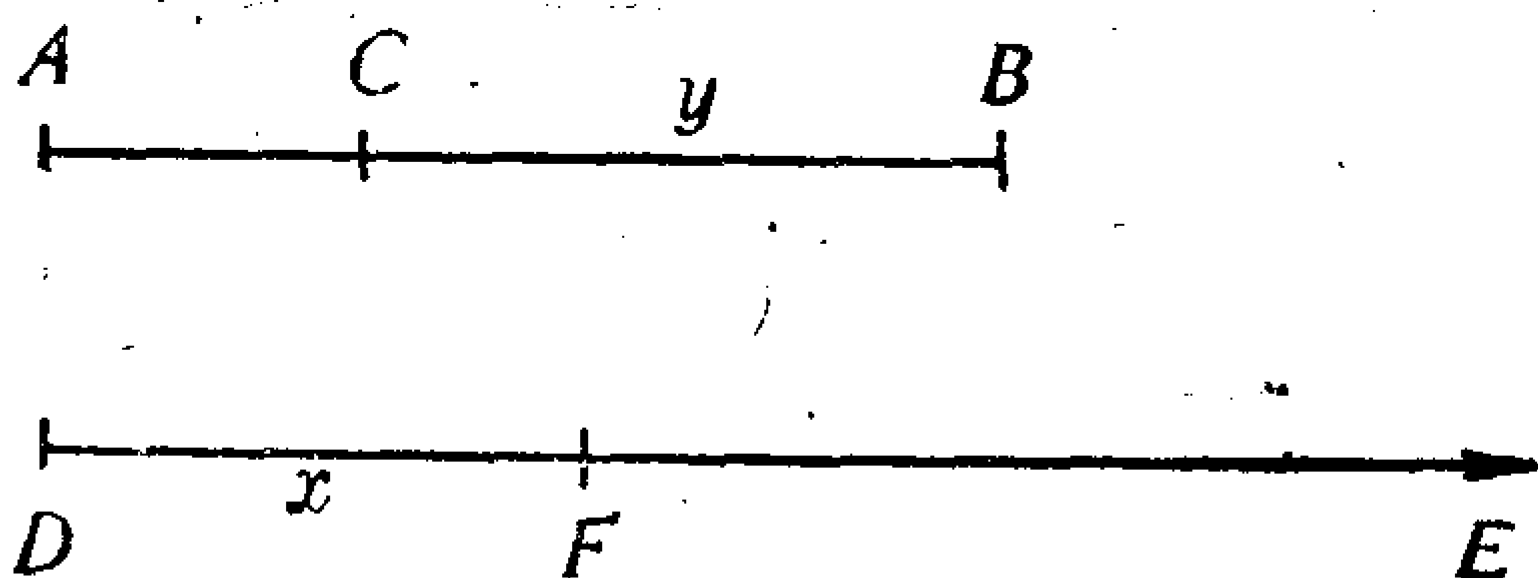
开头究竟是怎样灵机一动想到这项对天文学有莫大帮助的发明的。但是，爵爷，事情经您一澄清，原来却是这么容易，我又很纳闷以前怎么谁也不曾想到。”结果，教授作为上宾在贵族的城堡里盘桓了一月之久。

那位苏格兰贵族就是爱丁堡梅奇斯顿城堡的J.内皮尔（1550—1617）；那位数学家是伦敦格瑞莎蒙学院的几何教授H.布瑞格斯（1561—1631）；那项非凡的发明就是对数，这是计算领域内最节省精力的方法之一，显然是一项“数学史菁华”。

今天的中学生都知道，对数作为计算方法的威力，在于由此可以把乘除化为更简单的加减运算。这种化简方式在内皮尔的时代已有先例，当时就知道下述公式

$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right];$$

很可能就是这个公式启发了内皮尔最初的灵感，否则很难说明他最初何以只考虑角度正弦的对数。内皮尔惨淡经营了二十多年，才搞出他的理论，不论其起源如何，他最后的对数定义如下。考虑线段AB和一条无限射线DE，如图55所示。设点C和F分别沿此二直线以同样的初速自A和D同时出发，点C的运动速度，其数值总是等于距离CB，点F则匀速运动。于是内皮尔定义DF为CB的对数，即是，令DF



$=x$，$CB=y$，则

$$x=Naplog y.$$

为了避免小数的累赘，内皮尔取AB之长为10^7，因为他可以搜罗到的最后的正弦表是七位数字的。根据内皮尔的定义，利用当时还不知道的知识，可以推出*

$$Naplog\ y=10^7\log_{1/e}(y/10^7)\ ,$$

---

* 用一点微积分很容易说明这个结果。例如，我们有 $AC=10^7-y$，所以

$$C的速度=-\frac{dy}{dt}=y,$$

即是$\frac{dy}{y}=-dt$，积分得到$\ln y=-t+c$。以$t=0$代入求积分常数得到$c=\ln 10^7$，所以

$$\ln y=-t+\ln 10^7.$$

由于

$$F的速度=\frac{dx}{dt}=10^7,$$

所以$x=10^7t$。因此，

$$\begin{aligned}Naplog y=x=10^7t&=10^7\ (\ln 10^7-\ln y)\\&=10^7\ln\ (10^7/y)\\&=10^7\log_{1/e}\ (y/10^7)\ .\end{aligned}$$

——原注。

可见，说内皮尔对数就是自然对数（即以e为底的对数）这个屡见不鲜的说法实际上是不对的，因为只要注意，内皮尔对数随y的增加而减小，正好与自然对数的情形相反。

内皮尔于1614年出版了一本小册子，题为*Mirifici logarithmorum canonis, descriptio*（《奇妙的对数规律的说明》），其中讨论了他的对数，而且列出了角度依次相差一分的正弦对数值表。《说明》立即引起了广泛的兴趣。就在布瑞格斯1615年拜访内皮尔时，他们两人一致认为：如果把对数表加以改造，使1的对数是0，而10的对数是10的某个适当的方幂，那么对数表将会更加有用。这样就产生了今天中学里学习的所谓**布瑞格斯对数，即常用对数**，这种对数实质上就是以10为底的对数，它在数值计算中之所以成效卓著，正是因为我们的数字系统也是以10为底的。如果数字系统采用另外的一个底数b，那么按照这个系统进行计算工作时也采用以b为底的对数表，当然就比较方便了*。

---

* 就理论及分析的目的而言，对数系统最好的底应使对数函数具有最简单形式的导数。微积分课本里已经证明：若$y=\log_b x$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\log_b e.$$

如果取$b=e$，那么这个导数的形式就最简单，即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$$

以e为底的对数$\log_e x$称为自然对数，通常用特殊的符号$\ln x$来表示。——原注

布瑞格斯拜访内皮尔后返回伦敦，就把全副精力投入编制常用对数表的工作，于1624年出版了他的《对数计算》，其中有一份14位数的常用对数表，数值从1到20000以及从90000到100000。从20000到90000之间的空缺后来由一位荷兰书商兼出版家A.伏拉克（1600—1666）协助补全。在此以前，1620年，格瑞莎蒙学院的一位天文学教授、布瑞格斯的同事E.甘特（1581—1626）出版过一本七位数的正弦和正切的常用对数表，角度间隔是一分。cosine和cotangent这两个词就是甘特创造的；丈量人员由于使用"甘特测链"①也久闻其名。布瑞格斯和伏拉克出版过四种基本的对数表，驰誉数百年，直到1924至1949年间，英国为了庆祝对数发明三百年编制了20位数的对数表后才被淘汰。

logarithm（对数）这个词意指"比数"，是内皮尔采用的，他最初使用的说法是artificial umber（人造数）。布瑞格斯引进mantissa（尾数）这个词表示对数的小数部分，这个词是一个晚期的拉丁词，其词源属于厄特鲁辽语②，原意是"附加"、"补足"，十六世纪开始表示"附属"。charac-

---

① 一种度长工具，由一百段金属线，两头弯成环状，用圆环扣连而成．每段长7.92英寸，称为一令，所以一链总长100令，即66英尺，亦称4杆．在土地丈量中10平方链为一英亩。——译注

② 厄特鲁辽，意大利西北部古代民族。——译注

teristic（首数）表示对数的整数部分，这个词也是布瑞格斯提出的，得到伏拉克的采用。奇怪的是，早期的常用对数表习惯于把首数和尾数都印出来，直到十八世纪才确定了现在这种只印尾数的办法。

内皮尔的非凡发明在整个欧州广为采用，尤其是天文学，对于这样一种发现早就是翘首而待了；正如拉普拉斯所说，对数的发明"由于减少了劳动使天文学家延年益寿。"J. 开普勒也大力宣扬，使对数在德国风行一时，下一讲我们还要介绍开普勒的事迹。意大利的B. 卡瓦列里和法国的E. 文伽特也有同样的功绩；卡瓦列里在第十九讲里将详加介绍，文伽特在法国度过多年，后来成为十七世纪英国撰写初等算术课本最著名的作者。

数学史上不时出现这样一种情况：一件特殊的数学发明或发现是不止一个人差不多同时得到的，好似水到渠成、决堤而出一样，这在后面讨论非欧几何的发现那一讲里可以得到例证。可是，就对数的情形而言，内皮尔唯一的真正对手似乎是瑞士的钟表制造家J. 毕尔格（1552—1632），他设计、编制了一份对数表，与内皮尔没有关联，于1620年发表了他的结果，那是内皮尔发表其结果之后六年的事。这两个人当然都是在发表之前早就孕育出对数的思想，但一般认为内皮尔先产生这个思想。然而，这两人的思路却是全然不同的：内皮尔出自几何的

考虑，毕尔格则是出自代数的考虑。今天，对数一般认为是一个指数，例如，若$n=b^x$，就说x是n关于底b的对数，记为$x=\log_b n$。按照这种定义，对数法则不过就是指数法则的改述。然而对数却是在使用指数之前发现的，这是数学史上的一件怪事。

内皮尔一生大部分住在苏格兰爱丁堡城附近梅奇斯顿城堡那富丽堂皇的家族庄园里：1550年诞生于该处，其父当时年仅16岁；1617年逝世于该处，与他向世界宣布他那伟大的发现仅隔三年。

内皮尔把毕生大部分时间和精力都投入当时的政治及宗教论战，他激烈反对天主教，拥护J．诺克斯及詹姆斯一世的事业①。1593年，他发表了一部遐尔传诵的著作，题为《对圣约翰②启示录全书之彻底揭露》，他在书中对罗马教会进行了尖刻的攻击，试图证明罗马教皇是反基督的，上帝打算在1688年到1700年之间使世界毁灭。该书极受欢迎，接连发

---

① 诺克斯（1515？—1572），苏格兰宗教改革领袖，苏格兰长老会创始人，著有《苏格兰宗教改革史》。詹姆斯一世（1566—1625），先为苏格兰王，称詹姆斯六世，在位期间1567—1625，即位时得到诺克斯的支持，后兼英格兰王，改称詹姆斯一世，在位期间1603—1625。詹姆斯一世支持宗教改革运动，把长老会定为国教，置于本国君主控制下，摆脱了以罗马教皇为首的天主教会的控制。这场宗教改革运动实际上是新兴资产阶级发动的反封建的社会政治运动。——译注

② 约翰为耶稣十二门徒之一，天主教尊为圣人，故称圣约翰。据传，《圣经》中的《约翰福音》及《启示录》就是约翰撰写的。——译注

行了二十一版，其中至少有十版是内皮尔在世时发行的，所以内皮尔真心相信，他后世的声誉是靠这本书支持的；在这一点上他该是多么荒唐！他的这本书今天是完全无人理睬了，只有几个好奇心重的人才有所闻，相反，他今天的声誉实在、主要而且几乎绝对地是靠他在数学上的一项消遣活动，即对数的发明而获得的。

内皮尔还是当时的科幻小说作者，预言式地描写过各式各样可怕的武器，叙述中还附有设计图表。他预言说，将来会研制出一种火炮，可以"把周长四英里的一块战场上高度在一英尺以上的所有生物都消灭干净"；还会造出"可供水下航行的装置"；也会发明一种战车，具有"火力充沛的活动枪口"，可以"朝各方面散射"。第一次世界大战中，这些预言都实现了，即是机枪、潜艇和坦克。

内皮尔喜欢研究数学及科学，作为其政治及宗教论战后的消遣活动，结果数学史上记载了他的四件天才的成果：(1)发明对数；(2)发明一种巧妙的记忆法，称为**扇形法则**，可以据此写出解球面直角三角形的十个有用的公式；(3)解球面非直角三角形时有一组四个有用的三角公式，通称为**内皮尔比例式**，其中至少有两个公式是内皮尔的成果；(4)发明了一种工具，称为**内皮尔算筹**或**内皮尔算骨**，用来进行机械的乘、除及开平方运算。有兴趣的读者

可以在本讲所附练习中找到最后三项的简短讨论。

H.布瑞格斯也曾大力发展对数，他有幸一度占据大不列颠设置的第一个数学教授职位，即是T.格瑞莎蒙爵士1596年在伦敦格瑞莎蒙学院设置的几何教授职位。H.萨维尔爵士一度任牛津大学蒙尔顿学院院长，后任伊顿学院院长，还在牛津大学讲过欧氏几何，他于1619年在牛津大学设置了两个教授职位，一个是几何教授，一个是天文学教授。布瑞格斯也有幸成为牛津大学萨维尔几何讲座的第一任教授。布瑞格斯在世时发表过一件著作，还留下六件不曾发表，已发表的著述中包括有关航海、欧氏原本、对数以及三角学的专题著作。

E.甘特编制出第一份角度正弦和正切的常用对数表，发明了对数尺，尺上所示各数的刻度到左端的距离与该数的对数成正比，所以利用一把两脚规加减对数尺的线段就可以机械地进行乘除运算。利用两把相同的对数尺进行加减法，一把沿着另一把滑动，如图56所示，这个想法则是W.阿垂德（1574—1660）提出的。虽然阿垂德早在1622年就发明了

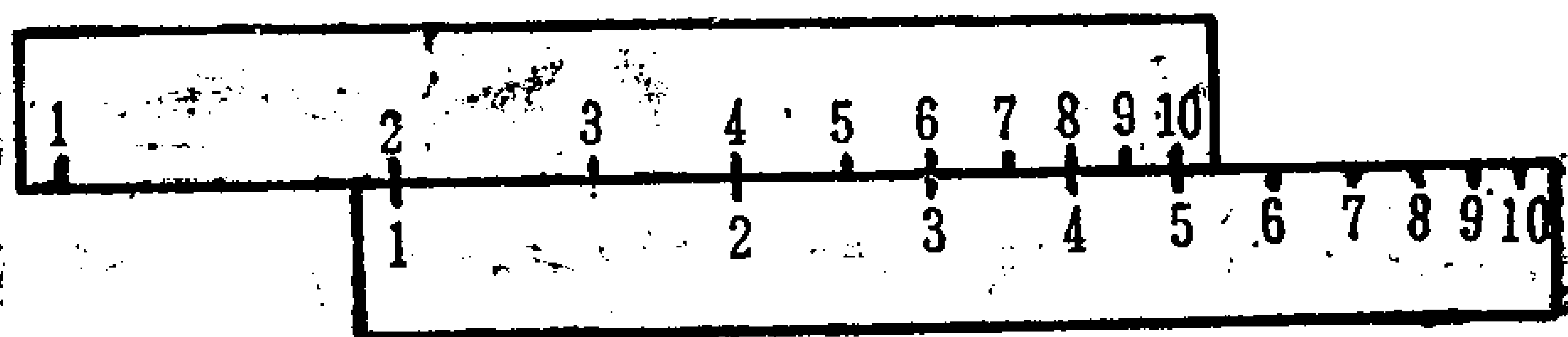


图56

这样一种简单的计算尺，但直到1632年才付印说明。

多年来高中或大学低年级数学课一直在教对数，而且把计算尺装在漂亮的皮套子里、挂在腰带上，这也是多年来大学工程学生的识别标记。但是，今天，随着那些奇妙的、日益低廉的袖珍计算器的出现，任何神志健全的人都不会使用对数表或计算尺来进行计算了，对数作为计算方法的教学工作渐次声销迹灭，制造精密计算尺的著名厂家也都停止生产，一些有名的数学表册开始考虑不再收入对数表。内皮尔这一“数学史菁华”的产物已经成为博物馆的藏品了。

另一方面，对数函数却决不会消亡，理由很简单：对数和指数的变化在自然科学和数学分析上都是极其重要的。因此，学习对数函数及其反函数（指数函数）的数学性质，将永远是数学教育的重要组成部分。

练习

17·1 利用熟知的指数定律证明下列有用的对数性质：

(*a*) $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$,

(*b*) $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$,

(c) $\log_b m^r = r\log_b m$,

(d) $\log_b \sqrt[s]{m} = (\log_b m)/s$.

17·2 证明：

(a) $\log_a N = \log_b N/\log_b a$（利用这个公式可以根据以$b$为底的对数表来计算以$a$为底的对数），

(b) $\log_N b = 1/\log_b N$,

(c) $\log_N b = \log_{1/N}(1/b)$.

17.3 求10的平方根，然后再求所得结果的平方根，继此以推，可以造出下面的表：

$10^{1/2} = 3.16228$,	$10^{1/256} = 1.00904$,
$10^{1/4} = 1.77828$,	$10^{1/512} = 1.00451$,
$10^{1/8} = 1.33352$,	$10^{1/1024} = 1.00225$,
$10^{1/16} = 1.15478$,	$10^{1/2048} = 1.00112$,
$10^{1/32} = 1.07461$,	$10^{1/4096} = 1.00056$,
$10^{1/64} = 1.03663$,	$10^{1/8192} = 1.00028$,
$10^{1/128} = 1.01815$,	……

利用这张表可以算出1与10之间任何一个数的常用对数，因而调整对数的首数也可以算出任何正数的对数。例如，设N是1与10之间的任何数。把N除以表中不超过N的最大数，设除数是$10^{1/p_1}$，商数为

N_1，于是$N=10^{1/p_1}N_1$。对N_1如法炮制，继此以推得到

$$N=10^{1/p_1}10^{1/p_2}\cdots10^{1/p_n}N_n.$$

当N_n与1之差仅在小数点后六位时，这个过程便告终了。这时，精确到小数点后五位

$$N=10^{1/p_1}10^{1/p_2}\cdots10^{1/p_n}$$

而

$$\log N=1/p_1+1/p_2+\cdots+1/p_n.$$

这种方法叫做计算对数的**根式法**。

(*a*)计算log4.26。

(*b*)计算log5.00。

17·4 解球面直角三角形有十个有用的公式，这些公式不必记忆，因为利用内皮尔想出的两条规则很容易写出来。图57画了一个球面直角三角形，按照惯例标上字母；该三角形右边是一个圆，分成

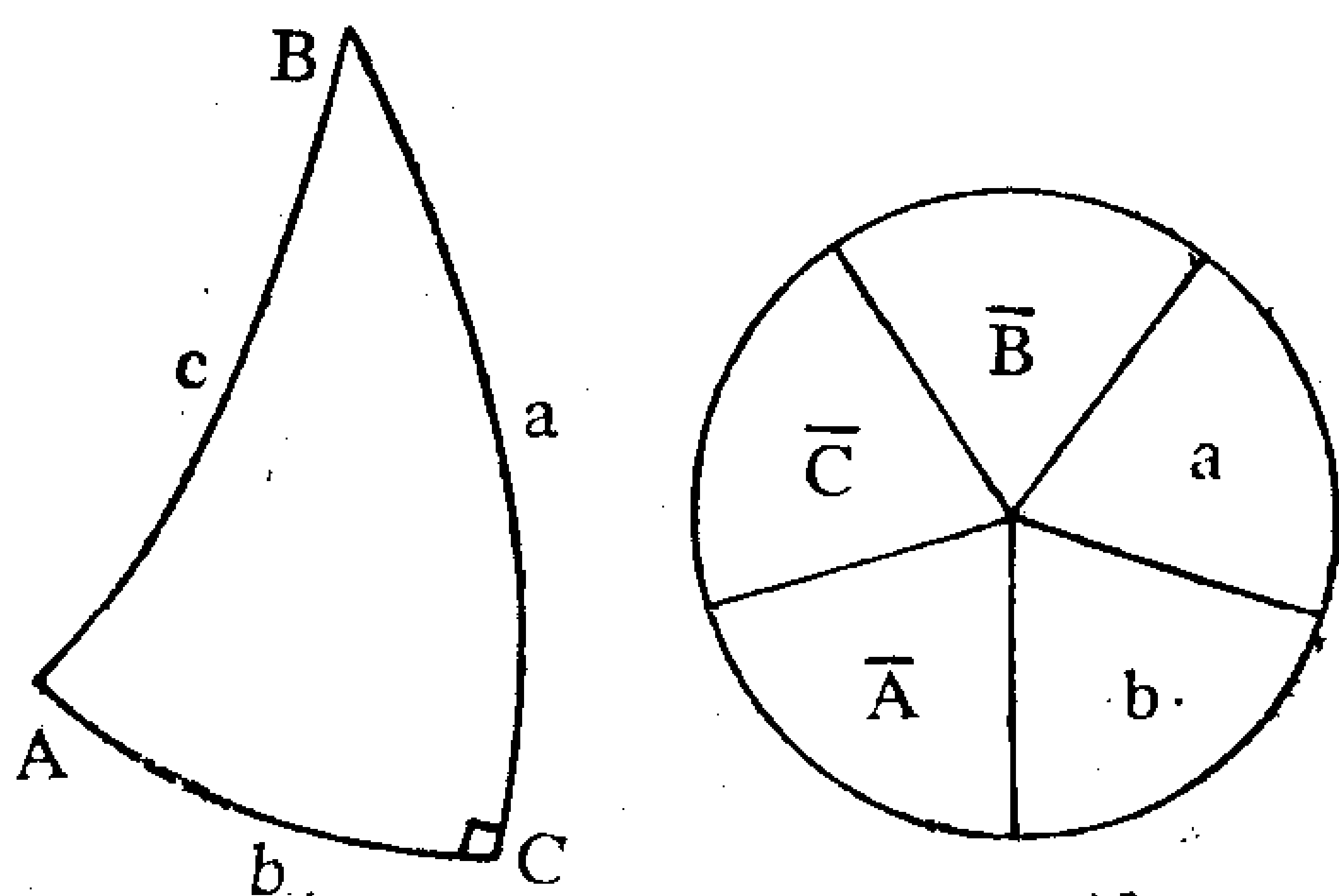


图57

五部分，所标的字母，除了没有C以外，与原三角形的字母一样，排列次序也相同；$\overline{c}$，$\overline{B}$，$\overline{A}$上面的短横线表示其"余角"（例如$\overline{B}$表示$90°-B$）。a，b，$\overline{c}$，$\overline{A}$，$\overline{B}$这些角度所在部分称为**扇形**。在这个圆内，对于任何已知扇形，有两个扇形与之相邻，也有两个扇形不与之相邻。我们把已知扇形叫做**中角**，两个相邻扇形叫做**邻角**，两个不相邻扇形叫做**对角**。内皮尔的规则可以叙述如下：

1. 任何**中角**的**正弦**等于两个**对角余弦**之积。

2. 任何**中角**的**正弦**等于两个**邻角正切**之积。

(*a*) 把上述每条规则应用于各个扇形，得出解球面直角三角形那十个有用的公式。

(*b*) 把球面直角三角形的三边a，b，c联系起来的那个公式，称为该三角形的**毕达哥拉斯关系**。试求出这个关系。

17·5 下列公式称为**内皮尔比例式**：

$$\frac{\sin(A-B)/2}{\sin(A+B)/2}=\frac{\tan(a-b)/2}{\tan c/2},$$

$$\frac{\cos(A-B)/2}{\cos(A+B)/2}=\frac{\tan(a+b)/2}{\tan c/2},$$

$$\frac{\sin(a-b)/2}{\sin(a+b)/2}=\frac{\tan(A-B)/2}{\cot c/2},$$

$$\frac{\cos(a-b)/2}{\cos(a+b)/2}=\frac{\tan(A+B)/2}{\cot c/2}.$$

这些公式与平面三角中的正切定律相似。可以用来解已知两边及夹角或两角及夹边的球面非直角三角形问题。

(a) 求一个球面三角形的A，c，b，如果$a=125°38'$，$C=73°24'$，$B=102°16'$。

(b) 求一个球面三角形的A，B，c，如果$a=93°8'$，$b=46°4'$，$C=71°6'$。

17•6 大数目的乘法普遍感到困难，这就使人想到使用一些机械方法来进行这个运算，内皮尔发明了当时很著名的一种工具，称为**内皮尔算筹**或**内皮尔算骨**，在内皮尔1617年出版的《筹算法》一书中有所说明。这项发明，其原理与练习13.9所述印度窗格法相同，只是现在进行乘法运算是用事先做好的一些长条形的骨头、金属、木材或纸板来完成的。十个数字中每一个都应该准备好若干长条，如图58左边所示，相应于数字6的长条，上面写有这个数字的各个倍数。为了说明如何使用这些长条进行乘法运算，让我们取内皮尔在《筹算法》中所举的例子：1615乘以365。把冠有1，6，1，5的长条并排放在一起，如图58右边所示。于是，1615乘以365中的3，6，5的结果，显然可见是4845、9690和8075，这只要进行一些简单的两个数字的对角线加法就行了。最后的乘积如该图所示，由加法求得。

6	1	6	1	5
6	1	6	1	5
1/2	2	1/2	2	1/0
1/8	3	1/8	3	1/5
2/4	4	2/4	4	2/0
3/0	5	3/0	5	2/5
3/6	6	3/6	6	3/0
4/2	7	4/2	7	3/5
4/8	8	4/8	8	4/0
5/4	9	5/4	9	4/5

3(1615) = 4845

5(1615) = 8075

6(1615) = 9690

```
  8075
 9690
4845
------
589475   答案
```

图58

(*a*)制作一组内皮尔算筹，完成一些乘法运算。

(*b*)说明如何用内皮尔算筹进行除法运算。

17·7 (*a*)查表制作一把对数尺，长约10英寸，称为*D*尺。使用这把尺，配合一把两脚规，进行一些乘除运算。

(*b*) 制作同样规格的两把对数尺，称为C尺和D尺。使C尺沿D尺滑动进行一些乘除运算。

17·8 制作一把对数尺，长度正好是练习17.7(*a*)中的D尺之半。把这样的两把短尺前后并连在一起，称为A尺。说明如何利用A尺和D尺来求平方根。

17·9 如何设计一把对数尺，可以配合D尺来求立方根？

17·10 制作一把对数尺，与C尺及D尺一样，只是刻度方向相反，称为CI尺（反C尺）。说明如何利用CI尺和D尺来进行乘法运算。利用CI尺和D尺进行乘法运算比利用C尺和D尺的优越性何在？

进一步的读物

Coolidge, J. L., *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.

Hobson, E. W., *John Napier and the Invention of Logarithms*, New York: Cambridge University Press, 1914.

KNOTT, C. G., *Napier Tercentenary Memorial Volume*, London: Longmans, Green, 1915.

十八、科学对数学的促进

伽利略与力学（公元1589年以后）

开普勒的行星运动律（公元1619年）

力大无穷的巨人安泰俄斯是尼普顿（海神）与蛰[①]（地神）之子，只要他同大地母亲保持接触，便所向无敌．凡是途经其国的异乡人都必须与之格斗，无一生还。碰巧有一天，赫丘利[②]与安泰俄斯厮打起来，但赫丘利发现了安泰俄斯神力的来源，就把这个巨人从地上举起来，在半空中击为齑粉。

这里可以为数学家打个比方：正如安泰俄斯是大地母亲生养培育一样，历史向我们表明，一切重要而持久的数学成果都是现实世界生养培育的结果。数学也象安泰俄斯那样，只要能够同现实世界保持接触，就永远是威力强大的。但是，如果使之离开其生养的实地，在纯抽象的朦胧雾霭中悬浮太

---

① 罗马神话中的海神尼普顿与地神蛰在希腊神话中分别是波塞冬与该亚。——译注

② 罗马神话中的英雄赫丘利在希腊神话中叫做赫拉克勒斯。他是宙斯之子，勇力无敌，除杀死安泰俄斯外，还完成了十二项伟绩。——译注

久，就有衰竭的危险。数学一定要经常回到现实世界去更新力量，不能永远与之脱离。

十七世纪，数学就发生过这种青春焕发的事情，那是两位杰出的数学家兼科学家G. 伽利略（1564—1642）与J. 开普勒（1571—1630）的发现起了带头作用。伽利略，在25岁以前就开始了一系列实验，由此发现了有关地球重力场中物体运动的若干基本事实；开普勒，到1619年，已经全部归纳出他那著名的行星运动三大定律。这些成就对于后世许多数学的发展影响很大，所以必须列为两件“数学史菁华”。伽利略的发现产生了现代力学，而开普勒的发现则产生了现代天体力学。这些学科的发展又要求创造新的数学工具——微积分，这样才能处理变化、流动及运动的现象。

一种新型的数学应运而生。把新旧数学加以对比，旧数学似乎暮气沉沉，老态龙钟，而新数学则显得朝气蓬勃，生龙活虎，所以，旧数学可以比作摄影学上的静物摄影阶段，而新数学则可比作电影摄影阶段。此外，旧数学与新数学相比，犹如解剖学与生理学相比：前者研究尸体，后者研究活体。还有，老数学只涉及固定与有限的对象，而新数学则囊括了变化与无限的对象。

伽利略1564年生于比萨①，是翡冷翠一个没落

① 意大利西北部城市，以其斜塔著名。——译注

世家的子弟。伽利略开头学医，觉得索然寡味，后来征得父母同意，改学科学与数学，在这些领域里他有极好的天赋。当他还在比萨大学学医的时候，就获得了他那历史上有名的发现：那里大教堂里悬挂的大吊灯周期性地来回摆动，其周期与摆动的弧度无关*。后来他证明了钟摆的周期也不依赖于摆锤的重量。他25岁时就被任命为比萨大学的数学教授，据说，在任职期间，他利用比萨斜塔完成了一些实验，证明重物下落并不比轻物更快，这是与亚理斯多德的学说相背的。他把一些球体沿倾斜的平面滚下，得到了下述定律：物体下落的距离与下落时间的平方成正比，这是符合现在的熟知公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的。

伽利略由于对比萨当地的论战感到很不顺心，于1591年辞去了比萨大学的职位，翌年接受了帕都亚①大学数学教授的职位，那里对科学研究有一种较为友善的气氛。伽利略在帕都亚生活了将近18年，持续地进行他的实验和教学工作，遐迩闻名。当他在帕都亚的时候，大约在1607年，他听说荷兰的透镜研磨家J.李伯尔舍姆发明了望远镜，便着手研制他自己的仪器，结果造出了一架望远镜，能够放大30

* 这只是近似真确：如果振幅很小，近似度就高。——原注

① 意大利东北部城市。——译注

多倍。他利用这架望远镜观察到太阳的黑子（这违背了亚里斯多德的命题：日无瑕），看到了月亮上的山峦起伏，观测到金星的相位变化、土星的光环以及木星的四颗明亮的卫星（这三项发现都为哥白尼的日心说提供了证据）。伽利略的这些发现引起了教会的反对，最后于1633年，他被传到罗马宗教法庭，被迫宣布撤消他的科学发现，幽禁家中。后来没过几年，这位大科学便双目失明，于1642年逝世，那一年正好I.牛顿诞生。

现代科学精神在于理论与实验的和谐一致，这一点应该归功于伽利略。他不仅发现了自由落体的力学原理，而且奠定了一般力学的基础，后来牛顿才能够据以建立起这门学科的数学理论。伽利略第一个认识到真空中发射物所经路径是一条抛物线这一性质，他还推究过动量定律，发明了第一架现代型的显微镜。早在1597年，他就改善了“扇形规”，这一简单仪器广为流行达二百多年之久。

伽利略用意大利文写过两件著名的专著：一件是关于天文学的，英文标题是*The Two Chief Systems*①(1632)，论述托勒玫宇宙观与哥白尼宇宙观的相对功绩；另一件是关于物理学的，英文标题是

① 这是简称：《两大体系》。意大利文标题是*Dialogo dei massimi sistemi*（《关于两大体系的对话》）。——译注

*The Two New Sciences*① (1638)，讨论一般力学与材料力学。这两件著作都是以三人对话的形式写成的：萨尔维亚提（一位博古通今的学者），萨格雷窦（一位聪明睿智的凡夫俗子），森普里丘（一位正统的亚理斯多德信徒）。就是这第一件著作直接引起了伽利略的受审与幽禁；第二件著作在莱登出版，是伽利略在强制幽禁的不幸年代里写成的。在这些专著中可以找到对无穷大与无穷小的某些性质的认识，例如有无穷类等价的观念，这是后来十九世纪康托的集合论与超限数理论中的基本观念。

看来，伽利略对他那著名的同代人J.开普勒可能有些嫉妒，因为，尽管到1619年开普勒已经全部公布了他的行星运动三大定律，但伽利略对这些定律却全然置若罔闻。

J.开普勒1571年生于德国的斯图加特附近，开头在蒂玉宾根大学求学，打算将来当一名路德教派②的牧师。他象伽利略一样，觉得自己最初的职业选择很不称心，远不如科学、特别是天文学那样叫他心醉，所以后来他改变了自己的计划。1594年，

---

① 这是简称：《两门新学科》。意大利文标题是 *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze*（《关于两门新学科的谈话与数学论证》）。这件著作是秘密传入荷兰在莱登城出版的。——译注

② 马丁·路德是十六世纪德国的宗教改革家，创建了基督教新教的路德教派。——译注

他二十多岁，接受了奥地利格拉兹大学的讲师职位。五年以后，他为著名的丹麦瑞典天文学家T.布援厄当助手，当时布援厄已在布拉格为鲁道夫二世陛下担任宫庭天文官。过后不久，1601年，布援厄突然去世，开普勒不仅接替了他老师的位置，而且还获得了布援厄收集的有关行星在天空运行位置的大量精确资料。于是，开普勒根据布援厄那一大堆观测数据，着手探索行星究竟是如何在空间运行的，他那坚持不懈的精神实在惊人。

经常有人说，只要工夫深，持之以恒，几乎没有不可解决的问题。T.爱迪生曾经说，发明是百分之一靠灵感，百分之九九靠汗水；解决问题也差不多：百分之一靠创造，百分之九十九靠坚持。开普勒在解决行星绕日运动问题时那种惊人的毅力，清楚地证明了这一点，在科学史上也许再也找不到更好的例证了。哥白尼的日心说是：行星沿着绕日心的轨道旋转；开普勒对此坚信不疑，他顽强地企图确定那些轨道的性质和位置，以及行星沿轨道运行的方式。由于掌握了布援厄那大量的观测记录，问题就在于求得行星运动的一种模式，与布援厄的观测完全相符。布援厄的记录是可靠的，所以任何一种解答，要是与布援厄观测到的位置哪怕相差只是月球的视觉直径的四分之一，也一定是错误的，不能采用。于是，开普勒先以他的**创造力**猜测某种可能

的解答，然后为了证实或否定他的猜测，他又以令人心力交瘁的坚持不懈精神进行大量冗长乏味的计算。他百折不挠，进行了许许多多的计算，工作热情和耐心多年不衰。最后他解决了他的问题，提出了他的行星运动三大定律，头两个是1609年发现的，第三个晚十年，是1619年发现的：

Ⅰ.行星绕日运动，其轨道呈椭圆形，太阳位于椭圆的一个焦点处.

Ⅱ.联结行星与太阳的向径在相等的时间内扫过相等的面积.

Ⅲ.行星沿轨道绕一整圈的时间的平方与轨道半长轴的立方成正比.

这些定律是根据布拨厄的大量数据凭试验发现的，是科学史上最了不起的归纳结果。难怪开普勒为他1619年出版的《宇宙的和谐》一书作序时，得意扬扬地写出了下面一段诗意盎然的话：

> **我是在为我的同代人写书，或者说，为子孙后代写书（这无关紧要）.也许，我的书要等一百年才有知音.上帝不是等了六千年才有顶礼膜拜的人吗？**

开普勒的行星运动定律是天文学史及数学史上的里程碑，因为I.牛顿为了证实这些定律而创建了现代天体力学。有一件事很值得注意：希腊人研究出圆锥曲线的性质之后，竟然过了1800年才出现这样一个光彩夺目的实际应用！一件纯数学的作品什

么时候才能得到意想不到的应用，这永远是一个谜。

开普勒为了计算其第二定律中所说的面积，不得不采用一种粗糙的积分法，从而使他成为积分学的先驱者之一。开普勒在其 *Stereometria doliorum vinorum*（《酒桶的体积测量》，1615年）一书中，对于圆锥曲线段绕其平面轴旋转而得的93种不同的立体图形，也用某些粗糙的积分法求得了相应的体积。这些立体图形中有圆环，还有他称为"苹果"和"柠檬"的两个图形，后面这两个图形是使一个圆的优弧和劣弧各以相应的弦作轴旋转而得。开普勒之所以对这些问题发生兴趣，是因为他看到当时酒量估算人员使用的方法很拙劣。卡瓦列里很可能就是受到开普勒这一工作的影响，后来才以他的"元素法"把积分学推进到一个新的阶段，这一点将在下一讲讨论。

开普勒对多面体这一主题也有可观的贡献。他似乎最先认识到**扭棱柱**（让棱柱的上底在其平面上转动，使顶点与下底的边成对应，然后用折线把两底的顶点联结而成）；他还发现了宫灯十四面体①、菱形十二面体和菱形三十面体，其中第二种在自然界的表现就是石榴石结晶。四种可能的星形多面体

① 把一个立方体八个犄角切掉构成的十四面体，其中八个面是相等的正三角形，六个面是相等的正方形。——译注

中有两种是开普勒发现的，其余两种是几何力学的先驱者L.蒲望索（1777—1859）于1809年发现的；开普勒及蒲望索的星形多面体是平面上的星形正多边形在空间中的相应图形。开普勒还率先研究正多边形（不必完全相同）覆盖平面的问题。

圆锥曲线几何中的焦点的拉丁文 focus（表示"炉边"）就是开普勒引进的，他给出了半轴为 a 与 b 的椭圆周长的近似值 $\pi(a+b)$，他还提出一条所谓的"连续性原理"，即是假设平面上存在某些理想点和一条理想直线，位于无穷远处，具有平常的点与直线的许多性质，他由此说明：直线可以视为在无穷远处闭合，两条平行线应视为在无穷远处相交，抛物线可以视为椭圆或双曲线当一个焦点隐退到无穷远时的极限情形。这些观念得到了后世几何学家的发展，

开普勒是一个坚定的毕达哥拉斯信徒，所以他的工作往往是怪诞的神秘主义与细致的科学精神的混合体。可悲的是，开普勒遭受了世上的许多灾难，使他的个人生活几乎难以忍受：当他年仅四岁时，染上了天花，使他的视力遭到很大损害，终生身体虚弱；他的青年时代毫无乐趣，结婚更给他带来长久的悲哀，他的宠儿也死于天花，他的妻子发疯去世；当格拉兹城落入天主教徒之手时，他被解除了格拉兹大学讲师的职位；他的母亲被指控为巫婆遭

到监禁，他几乎花了一年的时间拼命想救她出狱，他自已也差点蒙上了异端邪说的罪名；他的薪俸总是迟迟领不到。有报告说，他第二次结婚比第一次更加不幸，虽然他防患于未然，事前细针密缕地分析了十一个姑娘的长短，结果还是挑错了。他迫于无奈，靠算命来增加收入。1630年，开普勒去索取一些长期拖欠的工资，在旅途中因热病去世，享年59岁。

练习

18·1 伽利略假定所有物体都以相同的常值加速度g下落，他证明了物体下落的距离d与下落时间t的平方成正比。试对伽利略论证中下列阶段给出证明。

(a) 若v是在时刻t的速度，则$v=gt$。

(b) 若v与t是就一个落体而言，V与T是就另一个落体而言，则有$v/V=t/T$，从而勾、股之长为v与t的直角三角形相似于勾、股之长为V与T的直角三角形。

(c) 由于速度的增加是均匀的，所以平均下落速度是$\frac{1}{2}v$，从而$d=\frac{1}{2}vt=$勾、股之长为v与t的直角三角形的面积。

(*d*) 证明：$d/D=t^2/T^2$ 以及 $d=\frac{1}{2}gt^2$。

伽利略是通过观测沿斜面滚下的球体的下落时间来说明最后一个定律的。

18·2 “扇形规”由两只规臂组成，用转轴钉在一头连接在一起，如图59所示。在每只规臂上都

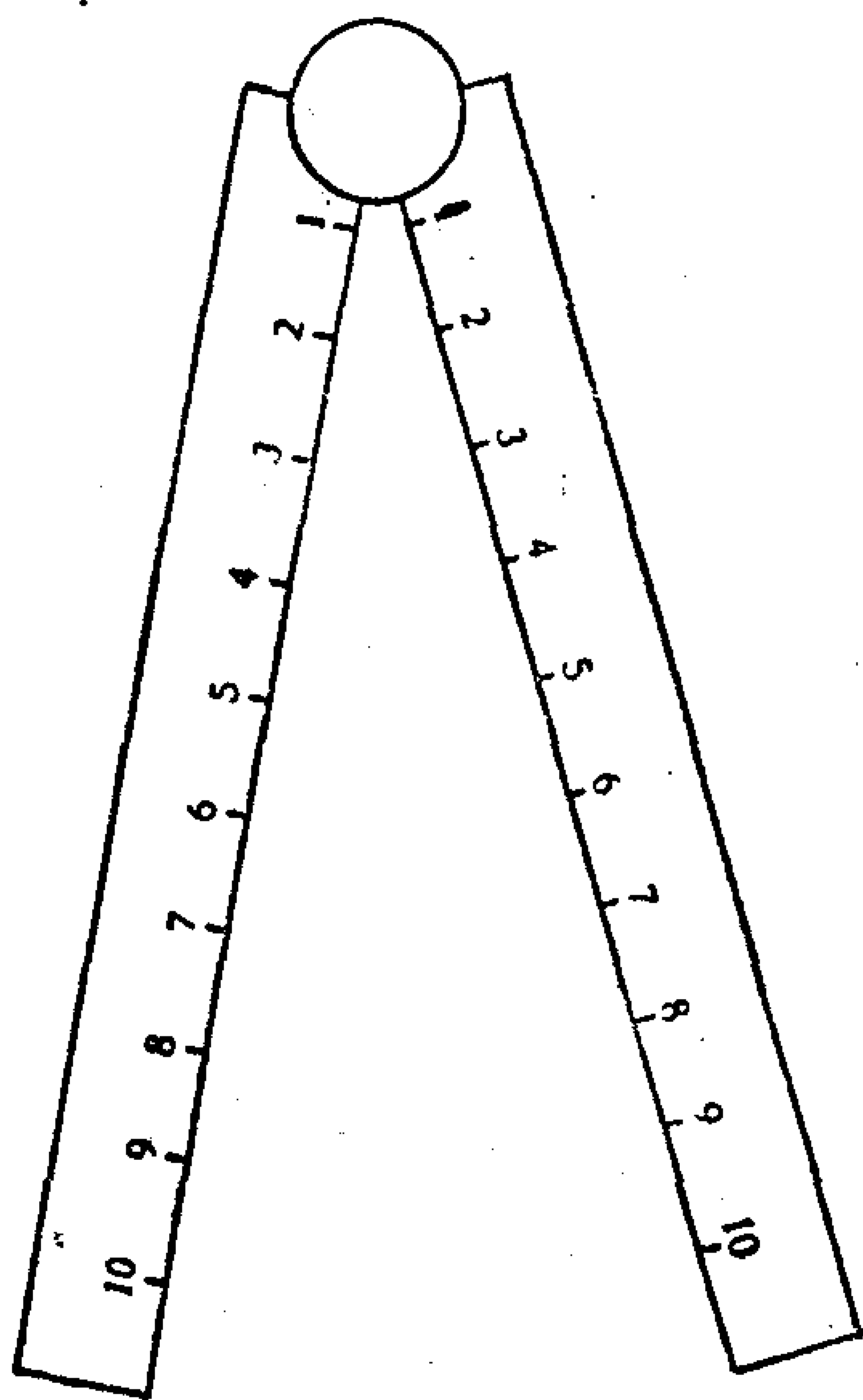


图59

有一种简单的刻度，从转轴出发，以转轴作为刻度的零点。

(*a*) 说明如何利用扇形规把已知线段分成五等份。

(*b*) 说明如何利用扇形规来改变绘图的比例。

18·3 (*a*)说明如何利用扇形规来求三个已知量a，b，c的第四比例项x（即是求x，使得$a:b=c:x$），并说明由此如何用于外汇问题。

(*b*)伽利略说明扇形规的用法是用下述问题：如果以利率6%按年计复利，现有本息共150斯库多①，求五年前应存入的本金数额。试用扇形规解此问题。

扇形规的两臂上经常配有附加刻度；一种叫做"面积尺"，是按有关各数的平方值来标上刻度的，用来求数的平方及平方根；另一种叫"体积尺"，是按有关各数的立方值来标上刻度的；还有一种可以给出单位圆上某些特定度数的弧的弦长，技术人员可以用来作量角器；另一种叫做"金属尺"，标有中世纪用的金、银、铜、铁等金属的标记，按照这些金属的密度确定其间隔的长短，可以用来解当铜球重量已知而求相等重量的铁球直径这样的问题。

扇形规操作起来不象计算尺那样精确而简便。

18·4 伽利略在其1638年的《两门新学科》中讨论过下述几何诡辩，试加以说明：

假设图60中的大圆沿直线从A到B滚动一圈，所以AB等于大圆的周长。于是，与大圆固定在一起的小圆也转了一圈，所以CD等于小圆的周长。由

---

① 意大利古金币名。——译注

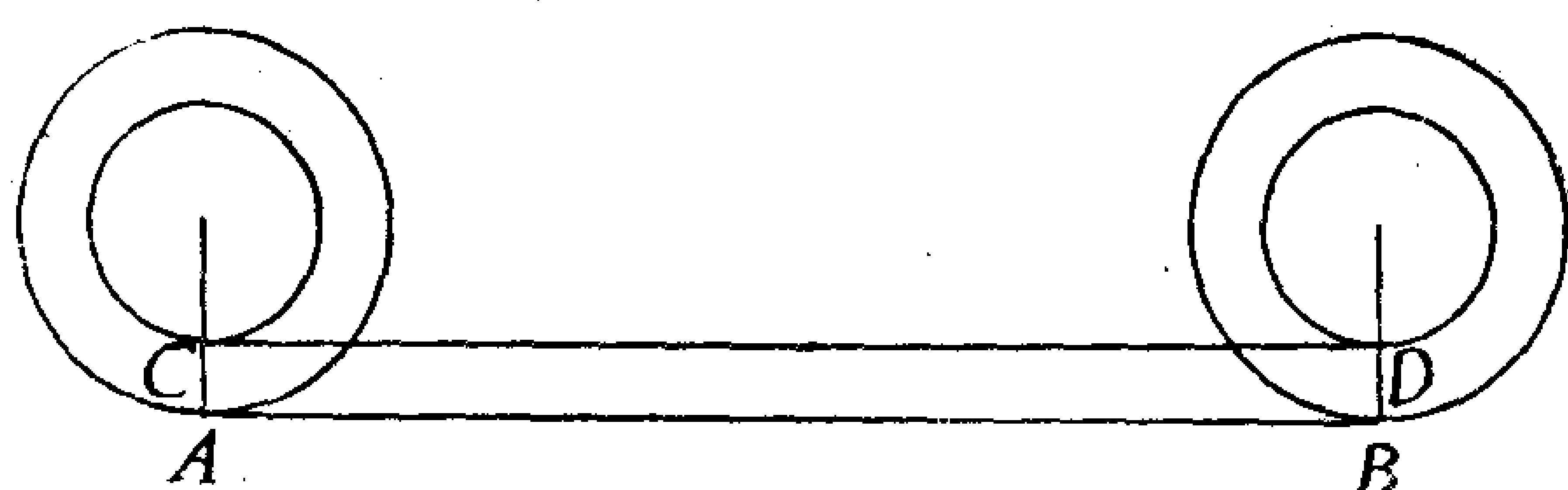


图60

此可见，**两圆有相等的周长**。

这个诡辩亚里斯多德早就讲过了，因而有时也称为“亚理斯多德转轮”。

18•5 伽利略在《两门新科学》中指出：“平方数的个数不少于所有的数的总个数，后者也不多于前者。”①试加以解释。

18•6 (*a*)行星速度最大时应在轨道何处？

(*b*)利用下列现代数据大致核对开普勒第三定律（*A*.*U*.表示“天文单位”，即地球轨道半长轴之长）：

行　星	以年为单位的时间	半长轴之长
水　星	0.241	0.387A.U.
金　星	0.615	0.723A.U.
地　球	1.000	1.000A.U.
火　星	1.881	1.524A.U.
木　星	11.862	5.202A.U.
土　星	29.457	9.539A.U.

(*c*)半长轴为100*A*.*U*.的行星，其周期是多

① 最后一句似应为“前者也不多于后者”。——译注

少？

(*d*)周期为125年的行星，其半长轴是多少？

18·7 (*a*)两个假想的行星绕日运行，其椭圆轨道的半长轴相等，但一个轨道的短轴为另一个之半。这两个行星周期之比如何？

(*b*)月球沿椭圆轨道绕地球旋转一周的时间是27.3天，轨道半长轴为地球半径的60倍。试问：与地表接近绕之旋转的卫星，其周期是多少？

18·8 用全等的正多边形铺满平面，这是很有趣的铺砖问题。设n是这种多边形的边数。

(*a*)如果多边形的顶点不能落在另一多边形的边上，试证明：在每个顶点处的多边形的个数是

$$2+4/(n-2),$$

因而必定有$n=3$，4或6。画图说明铺设方式。

(*b*)如果一个多边形的顶点一定要落在另一个多边形的边上，试证明：聚集在这种顶点处的多边形的个数是

$$1+2/(n-2)$$

因而必定有$n=3$或4。画图说明铺设方式。

18·9 试作图说明下列平面铺砖方式：

(*a*)两种大小的等边三角形，大者边长为小者边长的两倍，使得大小相同的三角形诸边不重叠。

(*b*)两种大小的正方形，大者边长为小者边

长的两倍，使得小正方形诸边不重叠。

(c)全等的等边三角形与全等的正十二边形。

(d)全等的等边三角形与全等的正六边形。

(e)全等的正方形与全等的正八边形。

(f)假设我们有一种平面铺砖方式，使得在各顶点处都有同样三种不同的正多边形。如果这三种多边形的边数分别是p，q，r，试证明：

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}.$$

这个方程有一个整数解：$p=4$，$q=6$，$r=12$。试作图说明由全等的正方形、全等的正六边形以及全等的正十二边形组成的这种铺设方式。

18·10 (a)开普勒把半径为r、周长为C的圆分成大量很窄的扇形，把每个扇形视为一个很窄的等腰三角形，其高为r，底为扇形的弧长，从而启发他得到圆面积公式$A=\frac{1}{2}rC$。试说明其论证方式。

(b)利用开普勒的那种论证思想求出半径为r、表面积为S的球的体积为$V=\frac{1}{3}rS$。

(c)利用开普勒的那种论证思想求出半长轴为a、半短轴为b的椭圆面积为$A=\pi ab$。

进一步的读物

Brasch, F. F., ed., *Johann Kepler, 1571–1630. A Tercentenary Commemoration of His Life and Work, Baltimore*: Williams and Wilkins, 1931.

Caspar, Max, *Kepler*, tr. by C. Doris Hellman. New York: Abelard-Schuman, 1959.

FAHIE, J. J., *Galileo, His Life and Work*, London: John Murray, 1903.

Pólya, George, *Mathematical Methods in Science* (New Mathematical library, No. 26). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1977.

十九、细分

卡瓦列里的元素法

（公元1635年）

十四世纪，斯叶纳城①受到教会祝福的G.寇龙比尼建立了一个宗教团体，叫做“耶稣团”，但同“耶稣会”毫无关系②。该团体是教皇乌尔班五世于1367年批准的，其原旨是照料当时蔓延欧洲的鼠疫患者以及掩埋死者。随着时间的流逝，耶稣团也就偃旗息鼓了，1606年曾企图重整旗鼓，但后来由于该团流弊日久，积重难返，终于土崩瓦解，烟消云散了。可能是该团制造及贩卖蒸馏酒，显然是教会法规所不容的，所以于1668年遭到教皇克勒门特九世的取缔。

1613年，就是耶稣团企图重整旗鼓之后不过几

---

① 意大利中部城市。——译注

② 耶稣会是天主教教士罗埃欧拉(Ignazio di Loyola, 1491—1556)创建的。两者意大利原名是由“耶稣”（Gesu）加不同后缀构成，但词义相近（Gesuati和Gesuiti）；英文名称则是音译，只有一个字母的差别（Jesuats和Jesuits），因而引起了下文所说的误传。——译注

年，有一个名叫波纳文图拉·卡瓦列里的十五岁的意大利少年被接纳入团，后来他就终生为该团服务。正是由于这个缘故以及耶稣团的最终湮灭，而耶稣团和耶稣会又自然容易相混，所以众多的大部头百科全书、历史著作以及资料辑录都误称卡瓦列里是一个耶稣会教士，而不是耶稣团成员，从而提供了一个绝好的例证，说明白纸黑字的史籍可能包藏着永远匿伏的错误，一位史家记载一段错误而无实证的说法，接着后世的史家又依样画葫芦重蹈覆辙，这样的事情是太容易发生了，所以许多错误的说法才得以广泛流传了相当长的时期。

卡瓦列里1598年生于意大利的米兰，受业于伽利略门下，自1629年至1647年他49岁逝世，一直担任波隆尼亚大学数学教授。卡瓦列里是当时最有影响的一位数学家，写过一些有关三角、几何、光学、天文学以及占星术的著作，他最早认识到对数的巨大价值，并且主要是他最先把对数介绍到意大利。但是，他对数学的最大贡献则是一份题为《元素几何》的专著，初版于1635年，论述微积分发明以前的“元素法”。正如近代数学的许多理论可以回溯到古希腊人一样，元素法，追源溯流，则可以归到德谟克利特（约在公元前410年）和阿基米德（约公元前287年—212年）。很可能是开普勒对积分法的探索直接启发了卡瓦列里。不管怎样，卡瓦列里

《元素几何》在1635年的出版是"数学史菁华"的标志。

卡瓦列里论述元素法的专著洋洋洒洒，但叙述不清，读了该书不易获知卡瓦列里所说的"元素"，其确切涵义究竟是什么①. 看来，平面图形的元素是指该图形上的弦；平面图形可以视为由无限多个这样的平行元素拼合而成. 同样，空间实体的元素则是该实体的平面截面；空间实体可以视为由无限多个这种平行元素拼合而成. 于是，卡瓦列里论证说，如果我们使某个平面图形的一组平行元素中每一个都沿着它的轴滑动，使所有元素的端点仍然描出一条连续的边界线，那么这样构成的这个新的平面图形的面积正好就是原平面图形的面积，因为这两个平面图形是由同样一些元素拼合而成的. 对于空间实体而言，使它的一组平行元素作同样的滑动，就得到另一个空间实体，其体积与原来的相同.（最后这个结果可以用一个明显的例证说明如下：考虑一沓向上重叠的卡片，把这一沓的侧面平推成曲面，于是，打乱了的这一沓与原来的一沓有相同的体积.）这些结果稍加推广就给出所谓的

卡瓦列里原理：

---

① 卡瓦列里"元素"(indivisible)是借用古代经院哲学的概念，意指不可分的最小单元. 这里是说，卡瓦列里没有确切说明其数学涵义. ——译注

1. 如果两个平面图形含于一双平行直线之间，如果与包围直线平行的任何一条直线在这两个图形上的截段之长总有固定不变的比值，那么这两个平面图形的面积也有同样的比值.

2. 如果两个空间实体含于一双平行的平面之间，如果与包围平面平行的任何一张平面在这两个实体上的截面面积总有固定不变的比值，那么这两个实体的体积也有同样的比值.

卡瓦列里原理是计算面积及体积的有用工具，其直观论据很容易利用近代积分观念加以严格化。只要承认这些原理在直观上是显然的，就可以解决许多平常需要更高的积分技巧的量度问题。

现在让我们举例说明卡瓦列里原理的用法：先使用平面原理求半轴为 a 及 b 的椭圆的面积，然后使用空间原理求半径为r的球的体积。

考虑椭圆和圆

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1，a>b，x^2+y^2=a^2，$$

其图形参考同一个直角坐标架画出，如图61所示。把上面的两个方程各对y求解，我们分别得到

$$y=(b/a)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}，\quad y=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

由此所见，椭圆和圆对应纵坐标有常值比 b/a，所以椭圆和圆的对应铅直弦也有同样的比值，从而据卡瓦列里第一原理，椭圆和圆的面积也有这个比值。这就得到我们的结论：

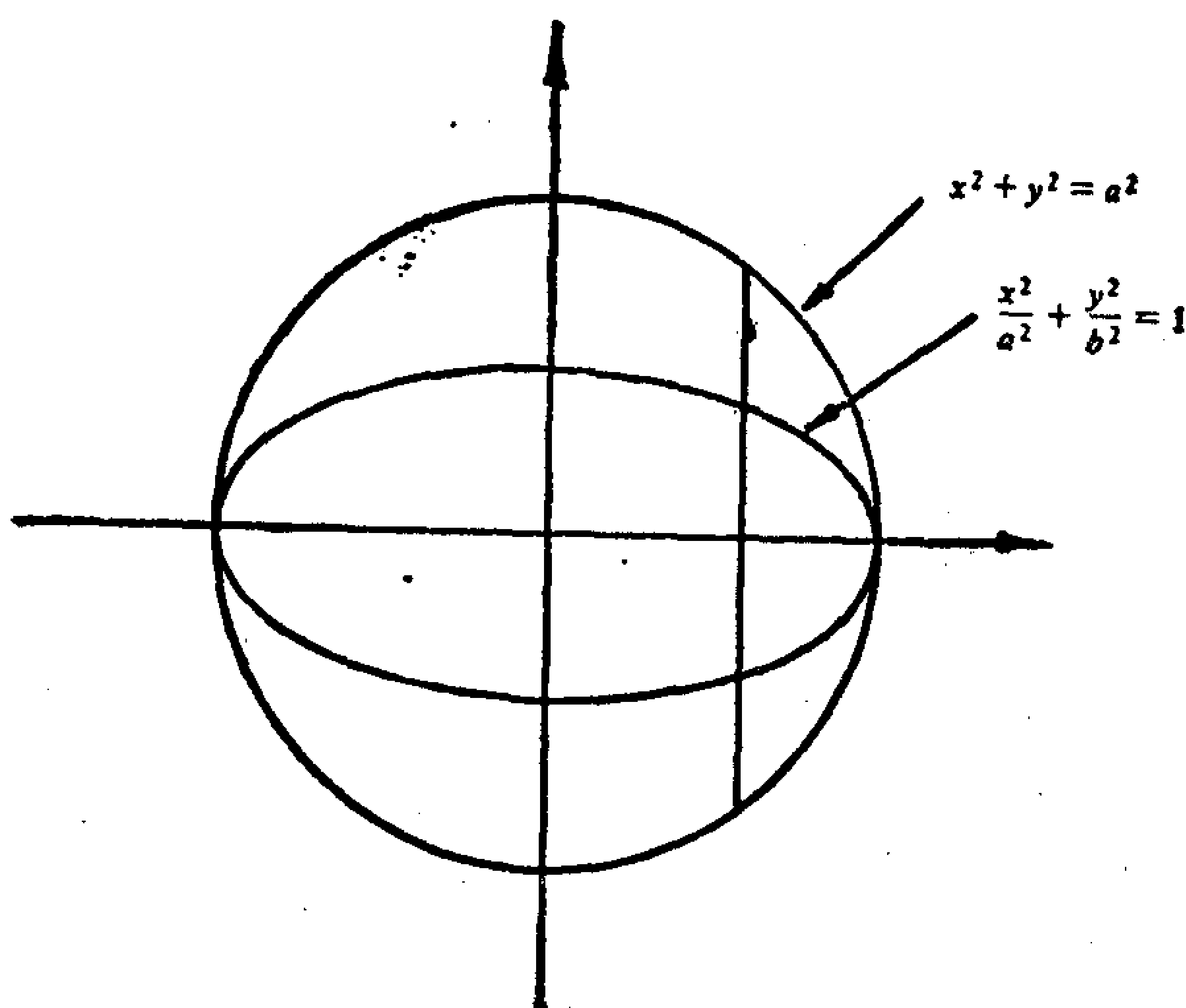


图61

$$椭圆面积 = (b/a)(圆面积)$$
$$= (b/a)(\pi a^2) = \pi ab。$$

这基本上就是开普勒求半轴为 a 和 b 的椭圆面积时使用的方法。

现在让我们求出半径为 r 的球的熟知体积公式。图62的左边是一个半径为 r 的半球，右边是半径和高都是 r 的圆柱体，其中挖掉了一个圆锥体，该锥体的底是圆柱的上底，顶点是圆柱下底的圆心。半球和有凿孔的圆柱坐落在一张公共的平面上。我们现在用一张与底平面平行、与之相距 h 的平面来截这两个立体图形：一个截面是圆，另一个截面是圆

环。据初等几何容易证明：这两个截面的面积都是 $\pi(r^2-h^2)$。因此，据卡瓦列里第二原理知，这两个立体图形的体积相等。于是球的体积为

$$V=2(\text{圆柱体积}-\text{圆锥体积})$$
$$=2(\pi r^3-\pi r^3/3)=4\pi r^3/3.$$

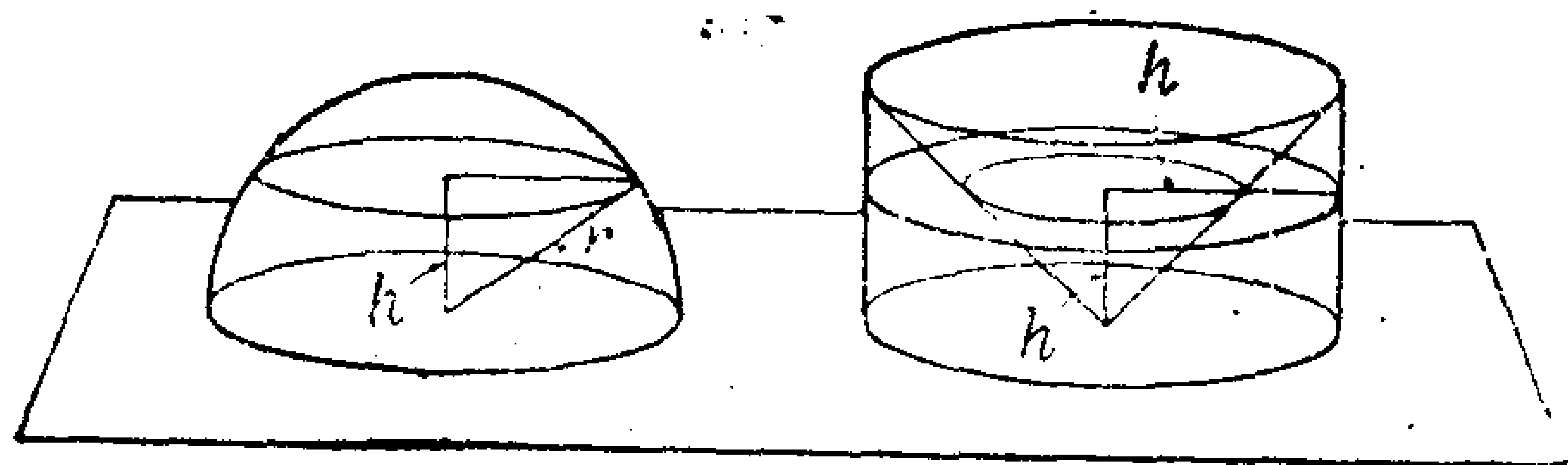


图62

作为卡瓦列里第一原理的另一个例证，让我们考虑图63左边所画图形的面积。右边所画图形的面积作为比较，这是容易求出的。因此，所求的面积是

$$A=(\pi/2+1)r^2.$$

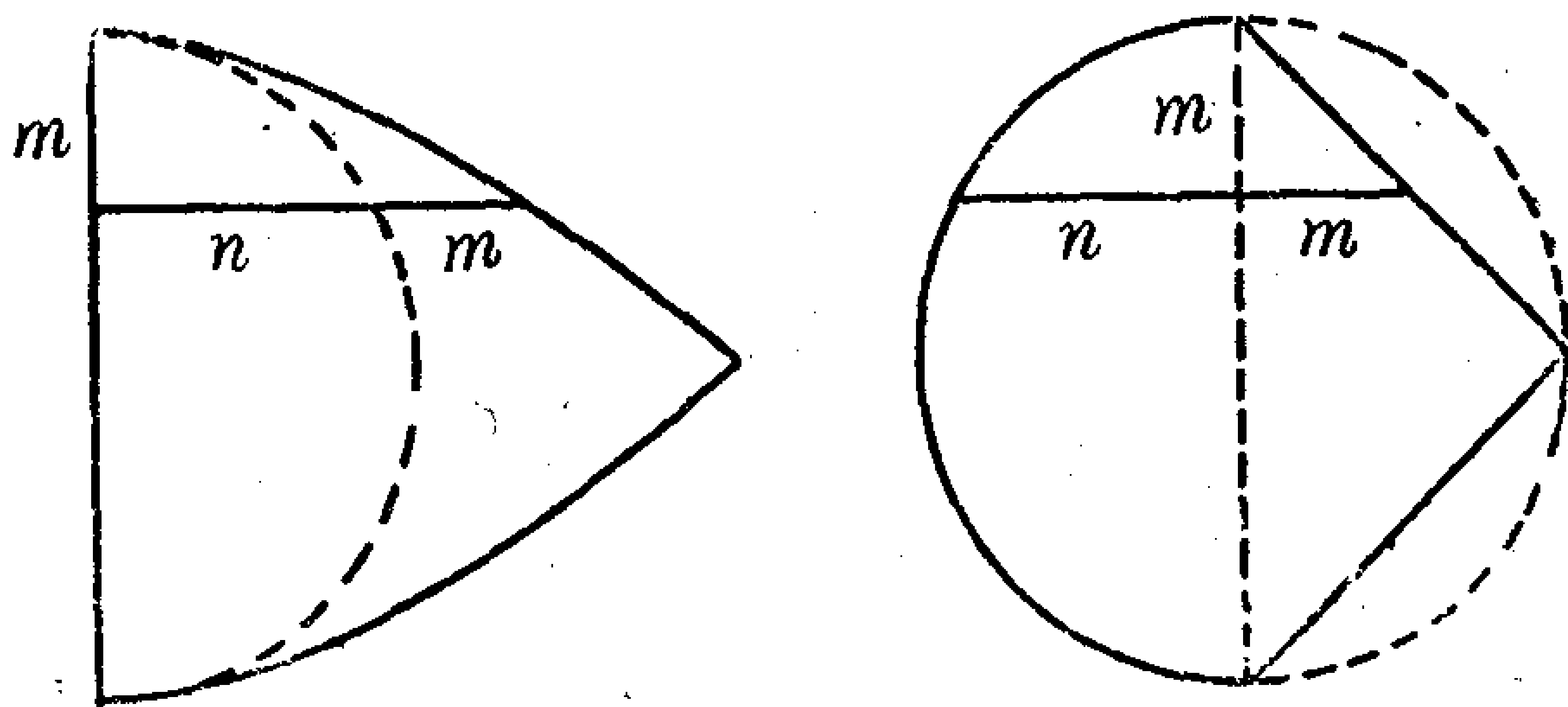


图63

作为卡瓦列里第二原理的另一个例证，让我们来求图64左边所示“球环”的体积，这是从半径为

r的实心球挖去与球的极轴共轴的一个半径为 a 的圆柱镗孔而得。作为比较的立体图形，是直径等于球环高度 $2k$ 的一个球，如图64右边所示。现在用一张水平面来截这两个立体图形，水平面与这两个立体图形的中心相距 h。在球环上的截面是一个圆环，面积为

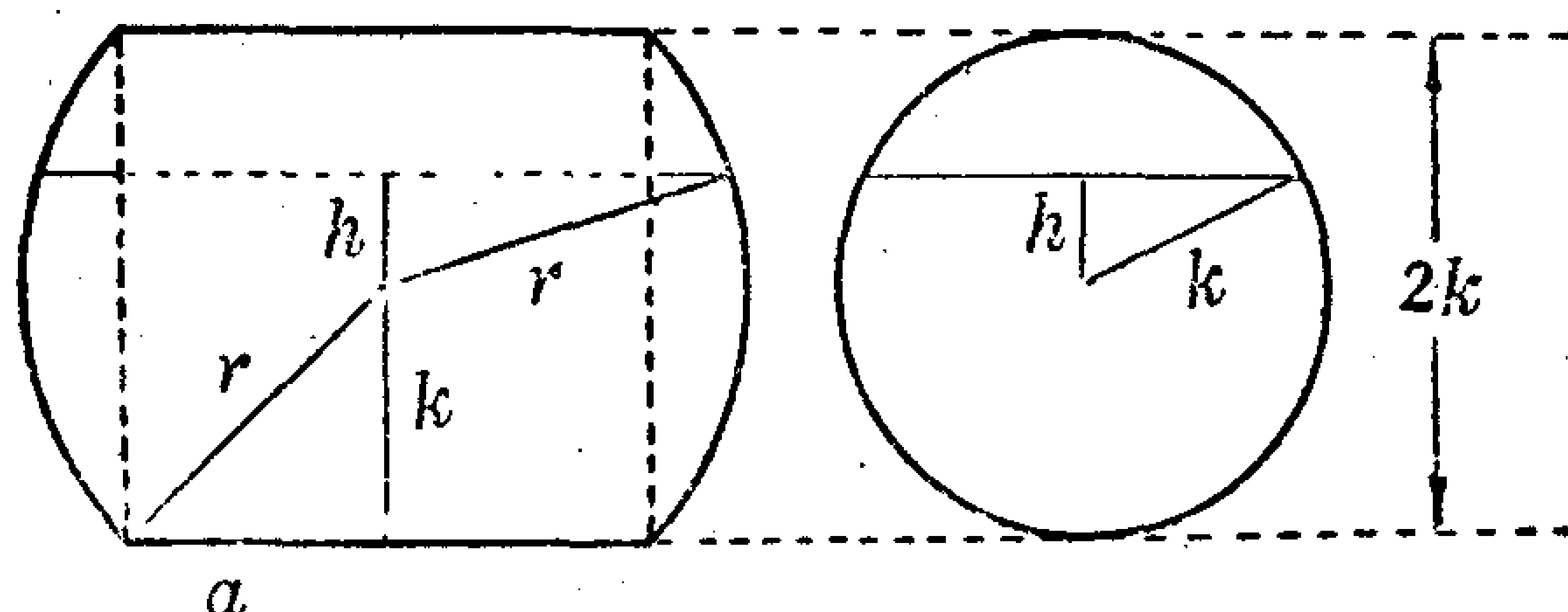


图64

$$\pi(r^2-h^2)-\pi a^2=\pi(r^2-a^2-h^2);$$

在球上的截面是一个圆，面积为

$$\pi(k^2-h^2)=\pi(r^2-a^2-h^2).$$

因此，球环的体积 V 等于半径为 k 的球的体积，即是

$$V=4\pi k^3/3.$$

有趣的是，**高度相同的所有球环具有同样的体积，而与环的半径无关.**

采用卡瓦列里第二原理作为前提，坚持使用，可以大大简化初等立体几何中碰到的许多体积公式的推演。这种方法已经得到一些教科书作者的采纳，而且根据教学的理由加以提倡。例如，在推演熟知的四面体体积公式 $V=Bh/3$ 时，难讲的部分是先要

证明：任何两个四面体，如果底面积相等而且这些底上的高也相等，则有相等的体积。自欧几里德的《几何原本》以来，所有讨论立体几何的书都表现出这一固有的难点。但是，如果利用卡瓦列里第二原理，这个难点就化为乌有了。

卡瓦列里关于元素的含糊观念，有点象是图形的原生部件，引起了这一主题的某些研究者的热烈讨论和认真的批评，其中最积极的是瑞士金饰商兼数学家P.古尔丁（1577—1642）。卡瓦列里曾重新改写他的处理方式，以应付这些反对意见，但未能如愿。法国几何学家兼物理学家G.P.de罗贝瓦尔（1602—1675）巧妙地使用过上述方法，并声称是该方法的独立发明人。E.托里切利（1608—1647），P.de费马（1601?—1665），B.巴斯卡尔（1623—1662）、G.de圣文桑（1584—1667）、I.巴若（1630—1677）等人也曾经有效地利用过这种方法或某种相仿的方法，他们在工作过程中取得的结果相当于完成了下面这样一些积分：

$$\int x^n dx,\quad \int \sin x\, dx,\quad \int \sin^2 x dx,\quad \int x\sin x dx.$$

两个平面图形，如果可以安放在平面上，使得与一组平行线相截，在每条直线上的两个截段都相等；同样，两个立体图形，如果可以安放在空间中，使得与一组平行平面相截，在每张平面上的两个截面的面积都相等，就说这两个图形是卡瓦列里全等的。

两个卡瓦列里全等的图形当然有相等的面积（平面情形）或体积（空间情形）。这种全等关系还有下列两条奇妙性质：

1.虽然任何多边形都不能与已知圆卡瓦列里全等，但却存在一个多面体（实际上是四面体）与已知的球是卡瓦列里全等的。

2.虽然存在体积相同的四面体不是卡瓦列里全等的，但面积相同的任何两个三角形都是卡瓦列里全等的。

练习

19·1 用现代积分方法证明卡瓦列里的两个原理。

19·2 利用卡瓦列里第一原理求出曲线

$$b^2y^2=(b+x)^2(a^2-x^2)\ ,\quad b\geqslant a>0$$

所包围的面积。

19·3 过直圆柱底面中心的斜面在该圆柱上截出一个圆柱楔形，称为**蹄形**。试用卡瓦列里第二原理求蹄形的体积，假定相应圆柱的半径为r，蹄形的高度为h。

19·4 证明：任何多边形与已知圆都不是卡瓦列里全等的。

19·5 求出一个多面体，与已知的球是卡瓦列里

全等的。

19·6 利用卡瓦列里第二原理求**环面**的体积。环面也称**锚状环**，是半径为r的一个圆绕该圆所在平面上与圆心相距为$c \geqslant r$的一条直线旋转而成。

19·7 (*a*) 证明：任何三棱柱可以分成三个四面体，两两有相等的底面积与相等的高。

(*b*) 用卡瓦列里第二原理证明：两个四面体，如果有相等的底面积和相等的高，就有相等的体积。

(*c*) 证明：四面体的体积等于底面积乘高的三分之一

19·8 **广义棱柱体**是指一个立体图形，具有两个平行的底面，并且与底面平行的截面面积是该截面与一底面距离的二次函数。

(*a*) 证明：**棱柱体**、**楔形体**（直三棱柱转向，以一个侧面为底安放）以及**棱锥体**的体积由**棱柱体公式**给出：

$$V = h\ (U + 4M + L)\ /6,$$

其中h是高，U、L和M分别是上、下底及中央截面的面积。

(*b*) 用卡瓦列里第二原理证明：广义棱柱体的体积也由棱柱体公式给出。

(*c*) 用积分法证明问题(*b*)。

19·9 说明下列立体图形全都是广义棱柱体的

例子，从而求出它们的体积表达式：(*a*) **球体**，(*b*) **椭球体**，(*c*) **蹄形体**（见练习19.3），(*d*) **斯德因梅兹立体**（两个直圆柱体的公共部分，这两个圆柱体半径相等，而轴垂直相交）。

19·10 两个立体图形含于一双平行平面之间，使得平行于包围平面的任何平面与这两个立体相截，其截面都有相等的周长。试问：这两个立体的侧面积是否相等？

进一步的读物

Boyer, C.B., *The Concepts of the Calculus*, New York: Dover, 1959.

二十、变形、求解、反演方法

解析几何的发明

（公元1637年）

数学家使用的一种最有效的方法就是所谓的**“变形、求解、反演方法”**，其主要思想如下：要解一个难题，先通过某种简化过程加以**变形**，成为一个比较容易的等价问题，然后对这个较易的问题**求解**，最后再把简化过程**反演**回去，得到原问题的解。让我们用几个例子来说明上述思想。

假设有人用法语问我们一个问题，而我们对这种语言并不精通。那么我们可以先把问题加以**变形**，成为用英语叙述的等价问题，而英语我们是运用自如得多的。然后我们可以用英语对问题**求解**，给出一个用英语叙述的答案。最后我们可以把英语答案**反演**为法语答案，从而解决了原来的问题。

其次，假定给了两个罗马数字LXIII和XXIV，要求我们用罗马数字来表示它们的乘积。我们可以把这两个罗马数字加以**变形**，成为相应的印度阿拉伯数字63和24。然后我们可以用印度阿拉伯数字

记法对有关的问题求解，即是用熟知的乘法演算求得乘积1512。最后，我们可以把这个结果反演回去，成为罗马数字记法，结果得到原问题的答案是MDXII。因此，一个困难的问题，加以适当的变形，就变成了一个容易的问题。

作为一个更复杂的问题，假定要我们证明：方程

$$x^7-2x^5+10x^2-1=0$$

没有大于1的根。我们用代换$x=y+1$把已知方程变形，成为

$$y^7+7y^6+19y^5+25y^4+15y^3+11y^2+17y+8=0.$$

由于新方程的根等于原方程的根减去1（由于$y=x-1$），所以我们应该证明：新方程的根都不大于0。要对这个等价的问题求解，只须注意，新方程的所有系数都是正数，所以y不可能是正数而同时使和式为零。最后，我们把结果反演回去，就得到所要的答案。

作为最后一个例子，假定要我们证明（见图65）：由三个全等的、方向相似而彼此两两外切的椭圆围成的曲线三角形，其面积不依赖于这三个椭圆的相对位置。我们知道，利用适当的正交投影，我们可以把任何椭圆投影为一个圆，其半径为该椭圆的半短轴。让我们对问题中的图形加以变形，即

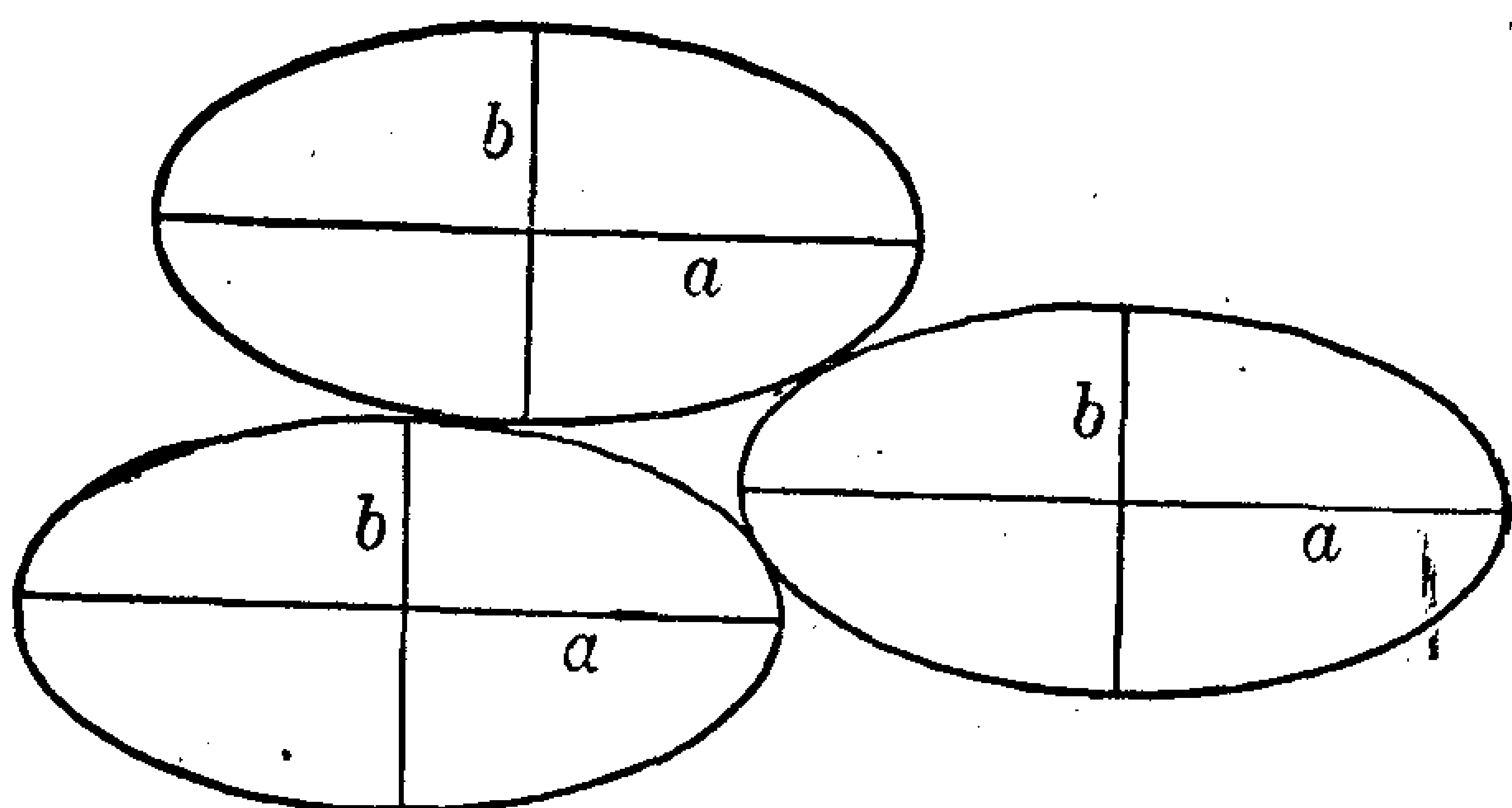


图 65

是利用一个正交投影把我们的三个相切而全等的椭圆变成三个相切而全等的圆（见图66）。已知：在正交投影下，相等的面积变成相等的面积，所以我们要证明的就是：在投影而成的图形上，曲线三角形的面积不依赖于这三个全等的圆的相对位置。这个问题很容易**求解**，因为这是显而易见的。最后我们把正交投影反演回去，就得到原问题的解。

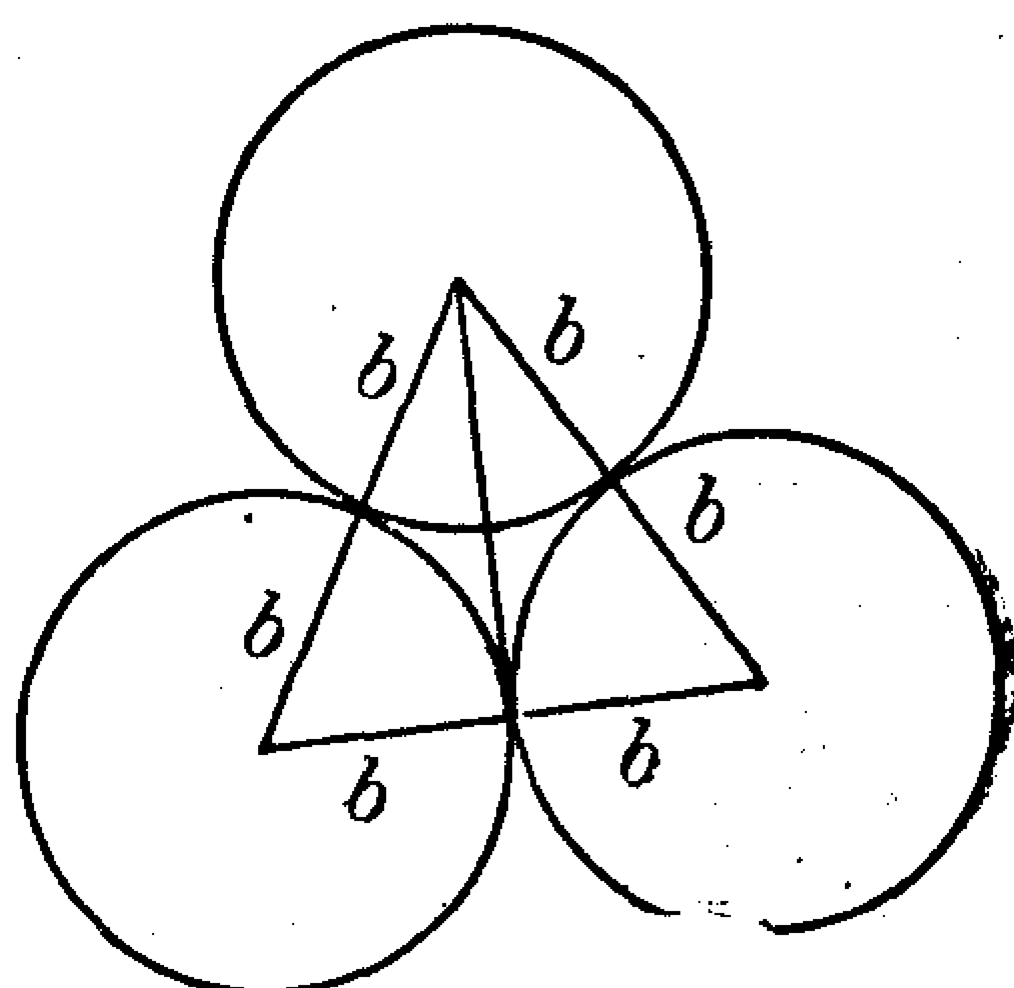


图 66

上述过程不仅有助于解题，而且还有助于发现新事实。我们对一个已有的数学提法加以**变形**，成为新的提法；研究这个新提法，我们**发现**了它的某种性质；然后把变形**反演**回去，得到原提法的一种

性质。这种方法得到数学家的广泛利用，可以称为**"变形、发现、反演方法"**。

例如，考虑上面最后一例，即涉及正交投影 p 的例子。已知：一个面积A经过投影 p 变成面积$A'=A\cos\theta$，这里θ是原图形所在平面与投影后图形所在平面的夹角。就我们的例子而言，容易证明$\cos\theta=b/a$，这里 a 和 b 是椭圆的半轴。设A和A'表示曲线三角形在投影前后的面积，由初等几何知（见图66），

$$A'=b^2(\sqrt{3}-\pi/2).$$

由此可见，

$$A=A'\sec\theta=b^2(\sqrt{3}-\pi/2)(a/b)=ab(\sqrt{3}-\pi/2).$$

因此，我们利用变形、发现、反演方法巧妙地求出了原曲线三角形的面积。

数学家发明的这种变形、求解、反演方法，其最重要、研究得最全面、成果最多的实例，无疑就是所谓的**"解析几何"**了。对于开始学习大学数学课程的学生来说，没有什么学习经历能够比接触到这种新颖而有力的解决几何问题的方法更叫他心情激动的了（解析几何是几何学的一种**方法**，而不是一个分支）。

解析几何的思想实质，就平面而言，读者当能记得，就是在有序实数对与平面的点之间建立对应关系，由此可以在平面曲线与二元方程之间建立对应关系，使得对于每一条平面曲线，都相应地有一

个确定的方程 $f(x, y)=0$，而且对于每个这样的方程，也相应地有一条确定的平面曲线或一个平面点集。同样，方程 $f(x, y)=0$ 的代数及分析性质与相应曲线的几何性质之间，也就建起立对应关系。于是，证明几何定理的问题就巧妙地变成了证明相应的代数定理或分析定理的问题。这一方法的深湛程度不仅如此，因为一个已知的代数或分析结果可能导致发现一个新奇而意外的几何结果，因此，不论是解决几何问题，还是发现新的几何结果，解析几何都是一种非常有效的方法。

解析几何是谁发明的，甚至是什么年代发明的，这些问题在数学史家之间向来是众说纷纭，莫衷一是。这种意见分歧主要是因为对于究竟什么算是解析几何没有一致的看法。那些厚古的人把发明的年代溯诸上古，举出一个众所周知的事实：用适当坐标确定点的位置，这种观念在古埃及人和古罗马人的勘测工作中就应用过了；古希腊人编制地图也应用过。如果解析几何不仅是指使用坐标，而且也指对坐标间的关系给以几何解释，那么有一个事实对古希腊人特别有利，就是阿波罗尼斯推演其圆锥曲线几何理论时，主要是依据这些曲线的某些笛卡尔方程在几何上的等价观念，这种观念似乎在公元前350年左右已由梅耐克蒙斯创立了。另一些人主张把解析几何的发明归功于N.欧勒斯梅.他约在1323

年生于诺曼底①，从数学教授飞黄腾达最后当了主教，于1382年逝世。欧勒斯梅在他的一篇数学短文中率先提出解析几何的另一个方面，即是用图示的方法来表示某些规律：随着自变量取一些小的增量，标出因变量相对于自变量的图形。鼓吹欧勒斯梅是解析几何发明者的人，在他的工作中看到了这样一些成就：第一个明确地引进直线方程，把这个主题的某些概念从二维空间推广到三维、甚至四维空间。欧勒斯梅的短文写成之后的百年间几经印刷，所以很可能对后世的数学家产生影响。

上面那些对解析几何的观点，似乎把这个主题同它的一个或几个方面混为一谈。可是，这个主题的真正精髓却是它的变形、求解、反演的特性：先把一个几何问题加以**变形**，成为相应的代数问题，然后对这个代数问题**求解**，最后把代数解答加以**反演**，得到几何解答。由此可见，一定要等到代数方法和符号体系得到发展以后，解析几何才可能有非常实用的形式。因此，似乎应该赞同大多数史家的看法，即是把十七世纪两位法国数学家R.笛卡尔（1596-1650）和P.de费马（1601？—1665）所做的决定性贡献视为这一主题的主要起源。肯定地说，只有在他们两人推动了这一主题之后，我们才看到

① 法国西北部地区。——译注

解析几何呈现出我们今天熟悉的那种形式。他们两人所做的开创性贡献可以视为“数学史菁华”中的菁华。

主张笛卡尔发明了解析几何，其依据是他的一述科学哲学的名著中三个附录之一。这部著作出版部论于1637年，题为*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*（《论正确进行推理及探索科学真理的方法》），就是其中最后一个附录，即题为《几何》的第三个附录，包含了笛卡尔对解析几何的贡献。这个附录首先说明代数几何的某些原理，表现出真正凌驾于古希腊人之上的进展。对古希腊人说来，一个变量相当于某个线段的长度，两个变量之积相当于某个矩形的面积，三个变量之积相当于某个长方体的体积。古希腊人的进展仅此而已。另一方面，对笛卡尔说来，x^2并不表示面积，而是表示比例$1:x=x:x^2$中的第四比例项；而这样的量是可以用适当的线段来表示的：只要知道x，就可以作图构造出来。同样，利用单位线段，我们可以用线段长度来表示一个变量的任何乘幂，也可以表示任意多个变量的乘积；只要变量的值确定以后，就可以用欧几里德作图工具把线段的长度实际画出来。笛卡尔在其《几何》中，利用这种对几何的算术化思想，在已知轴线上标出x，接着标出长度y，与已知轴线

成固定的角度，然后设法画出一些点，其相应的x与y满足一个已知关系（见图67）。例如，如果我

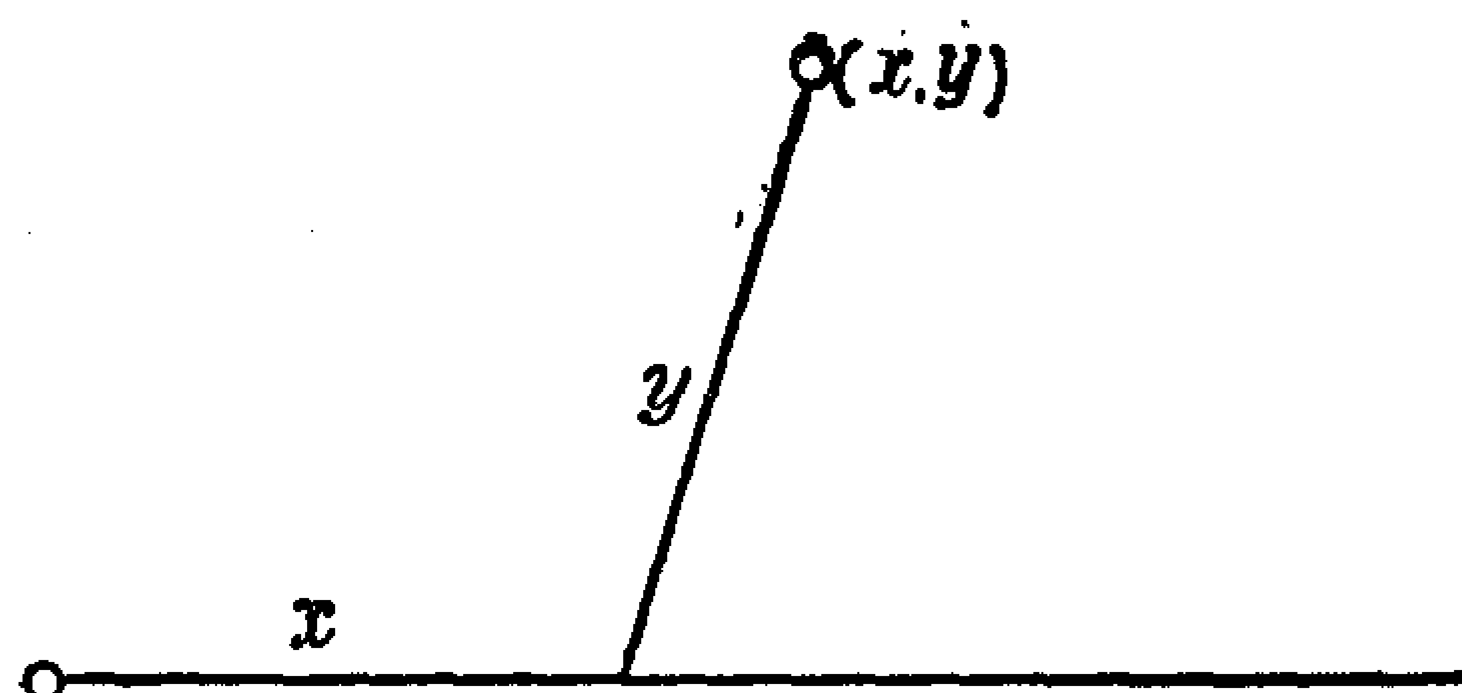


图 67

们有关系$y=x^2$，那么对于x的每个值，我们可以作图求出相应的y，作为上面给出的那个比例式的第四比例项。笛卡尔特别醉心于得到运动学上确定的那样一些曲线关系。

在笛卡尔提出现代解析几何基础的同时，P.de费马也全神贯注地研究这一主题。主张费马拥有优先权，其依据是费马1636年9月写给罗贝瓦尔的一封信，其中提到作者的这些思想早在七年前就产生了。他这件工作的详细材料收入身后发表的文章*Isagoge ad locus planos et solidos*①中，其中我们发现有一般直线和圆的方程，还有双曲线、椭圆和抛物线的讨论。在1637年以前完成的一件有关切线与求面积的工作中，费马用分析方法定义了许多新的

① 拉丁文：《平面轨迹及立体轨迹引论》。这里费马所说的"平面轨迹"与"立体轨迹"是按照古希腊数学家巴布斯的定义，平面轨迹是指由直线和圆构成的平面曲线，而立体轨迹则指圆锥曲线，因为圆锥曲线来源于圆锥这种立体图形。——译注

曲线。笛卡尔提出了由机械运动产生的几种新曲线，而费马则提出了由代数方程定义的许多新曲线。曲线$x^{m}y^{n}=a^{n}$，$y^{n}=ax^{m}$与$r^{n}=a\theta$现在仍然叫做**费马双曲线、费马抛物线以及费马螺旋线**。因此，可以说，在很大程度上，笛卡尔是先研究轨迹然后求其方程，而费马则是先研究方程然后求其轨迹，这是解析几何基本原理的两个相反的方面。

解析几何的入门课，其内容往往过于贫乏，使学生对这一主题得不到赏心悦目的了解，尤其是有些课程，其中解析几何已经削弱到只剩下皮包骨头的份量，勉强只够初等微积分课程的需要。结果，许多大专学生在解析几何里碰到的东西，不过就是简单的打点画曲线以及如何从多少是标准形式的方程识别圆锥曲线的形态。解析几何经过这样压缩处理以后，学生决不会感到这一主题的力量非同小可，决不会认识到它那惊人的灵活多变和运用之妙，实际上，很可能决不会发现一个不简单的几何问题被这种新方法攻克，决不会想到这一主题在几何发现中所起的作用。你要是能够感觉到解析几何的美与力，你就一定会为无缘问津的学生感到惋惜，一定会为由于无知而产生的这种教育上的不景气状况感到惊讶。

为了把中学几何的综合方法同这种更新的解析方法加以比较，让我们考虑下述命题：**三角形的三条**

中线共点，交点是各中线的三分点。请读者回想一下这个命题在中学课程里是如何证明的，或者，如果想不起证明，请自行设法提出一个中学里的那种证明。你很可能左右为难，理由就是中学里对这一命题的证明需要画一些辅助线；究竟该画哪些辅助线，这是很不容易想到或猜到的。

大多数中学平面几何课本里的证明如下（见图68）。设三角形ABC的中线BE和CF交于G，设M和N分别表示BG和CG的中点。作FE，MN，FM，EN。于是FE平行于BC且等于BC之半（联结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边之半）。同理，MN平行于BC且等于BC之半。因此，FE与MN既平行且相等，所以$FENM$是一个平行四边形。由

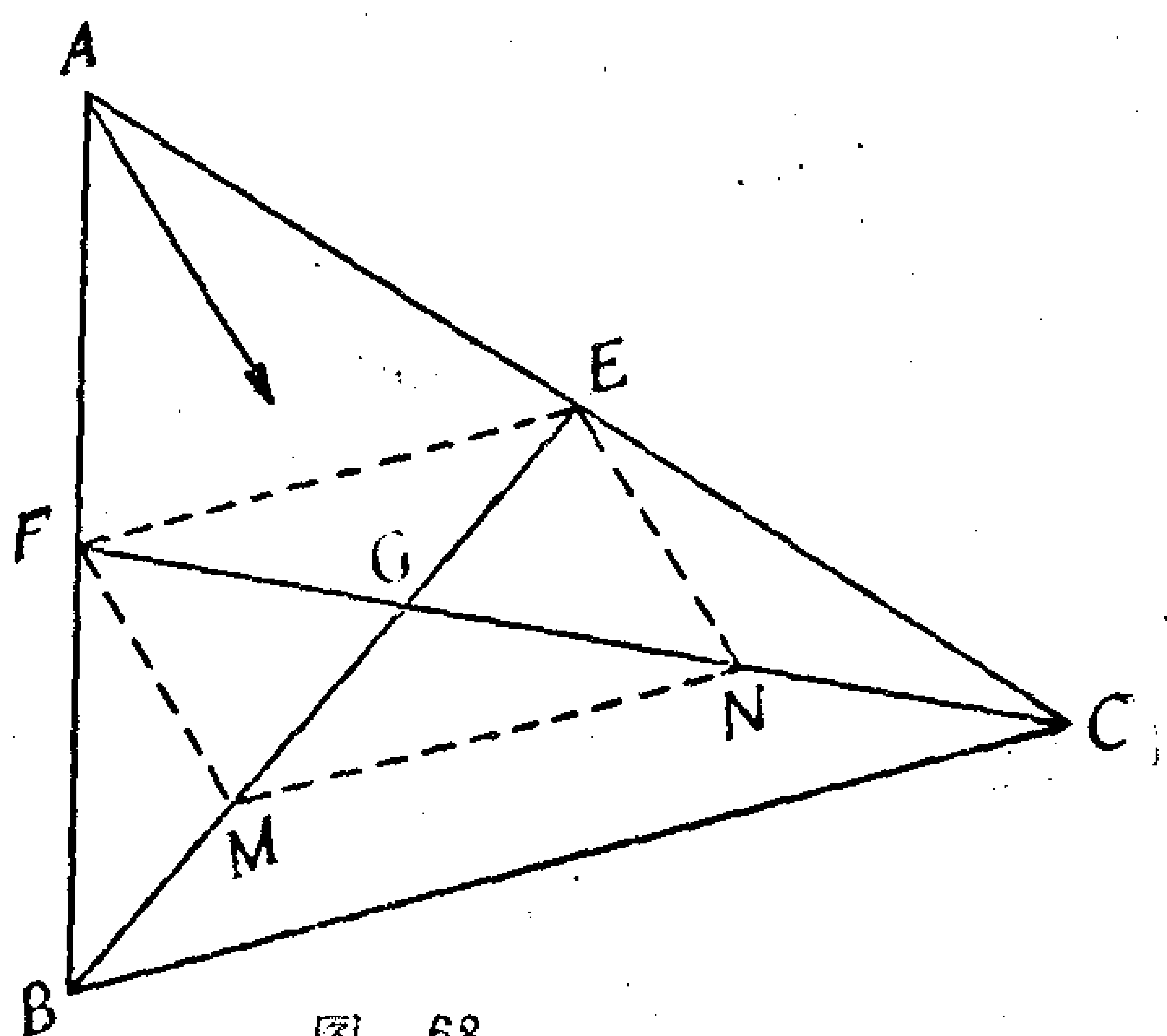


图 68

此可见，$MG=GE$，$NG=GF$。这就是说，BE和CF这两条中线的交点G位于这两个顶点到对边中点联线的三分之二处。由于对三角形ABC的任何一对中线都是如此，所以最后得到结论：所有这三条中线共点，交点是各中线的三分点。三角形三条中线的这个公共交点叫做三角形的**重心**。

必须承认，上述证明具有某些令人赏心悦目的美学性质，但是人们也得考虑，这个证明为什么既不易记住，也不易独自想出；人们就是记不住，或不知如何下手（即画辅助线FE，MN，FM，EN）。这一点是综合方法的主要难点，即不知如何着手，因为综合方法向解题人交代的不是任何按部就班的处理程序。综合方法需要有天赋的颖悟，或者只有经过千锤百炼之后才会产生的一种技能。

现在让我们重新证明上述有关三角形中线的那个命题，这一次是用解析几何的方法。把三角形ABC放在笛卡尔直角坐标架上任何位置（见图69），顶点A，B，C关于这个坐标架的坐标设为(a_1, a_2)，(b_1, b_2)，(c_1, c_2)。让我们来求出中线AD的第二个三分点G的坐标(g_1, g_2)。我们需要的只是解析几何中所谓的**定比公式**：把线段MN分成比例$MP/PN=r/s$的点P，其坐标(P_1, P_2)由下列公式给出：

$$P_1 = (sm_1 + rn_1)/(s+r),$$

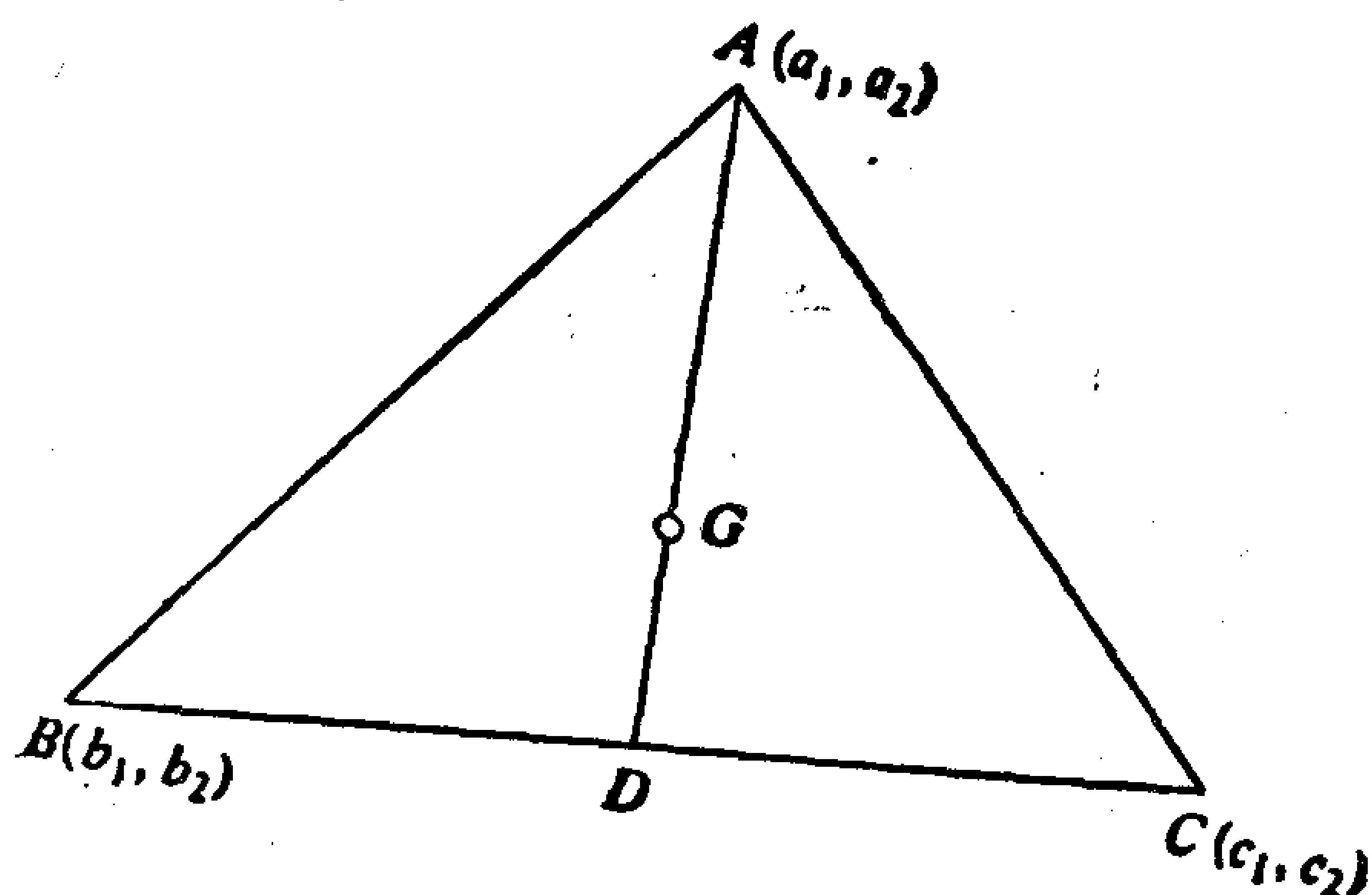


图 69

$$P_2 = (sm_2 + rn_2) / (s + r),$$

其中 (m_1, m_2) 和 (n_1, n_2) 分别表示M和N的坐标。我们利用定比公式求得D的坐标 (d_1, d_2) 为

$$d_1 = (b_1 + c_1) /2, \quad d_2 = (b_2 + c_2) /2.$$

再利用定比公式求得G的坐标 (g_1, g_2) 为

$$g_1 = (a_1 + 2d_1) /3 = (a_1 + b_1 + c_1) /3,$$

$$g_2 = (a_2 + 2d_2) /3 = (a_2 + b_2 + c_2) /3.$$

完全一样或只凭对称性就可看出，中线BE和CF的第二个三分点也是G。可见三条中线共点，交点G是各中线的三分点。命题证毕。

检查上述证明可以看出，我们并未碰到使用综合方法时碰到的那种基本难点，就是说，如何下手，下一步怎么办，等等，都不成问题。首先是把图形放在坐标架上，确定已知点的坐标；然后，由于我们要证明这三条中线有一个公共的第二个三分点，

所以我们着手求各中线上这第二个三分点的坐标。这是相当典型的解析方法；一般说来，究竟如何进行，我们是心中有数的。当然，要把这一程序进行到底，就要有信手拈来的各种有用的解析几何公式（我们这个例子里就需要定比公式）。正是这个缘故，解析几何的入门课首先就要建立若干这样的有用公式。

刚才证明的那个命题在三维空间中的相似提法叫做**寇芒底诺定理***，我们先定义四面体的一个顶点到相对面重心的联线为四面体的一条中线。于是，寇芒底诺定理可以叙述如下：**四面体的四条中线共点，交点是各中线的四分点。**读者也许愿意试手对这个定理提供一个综合证明；你肯定会注意到二维定理的解析证明可以直接推广到三维情形。这是解析方法的另一优点：解析证明往往容易推广以囊括更高维或更一般的情形。

总而言之，我们可以说：解析方法胜过综合方法的一个重要长处，就是用解析方法通常都有一个确定的循序前进的步骤，而用综合方法则必须求助于经验和“百折不挠”的精神。这难道是说，解析方法多少是一种例行公事，没有可供解题人发挥聪明才智的的余地吗？完全不是，因为，在解析证明

---

* 这是*F*.寇芒底诺（1509—1575）在其1565年的著作《论固体重心》中提出的。这个命题可能古希腊人早就知道了。——原注

的一个具体步骤上，尽管我们可能知道怎么办，但是真正办起来那却是另一回事了。有关的代数问题可能太复杂，无法完成；实际上，我们的代数才能就是不强，不足以胜任。例如，在用解析方法证明一个命题时，可能走到一步，需要解一个八次方程，但求解即便并非真不可能，也许会是非常困难。这里就是解析几何的暗礁所在：我们往往知道如何行事，但却无能为力。这时，解题人就要改弦易辙，妙手回春，避开代数上的拦路虎。这就是使用解析方法需要聪明才智的地方。

经验证明，综合与解析这两种方法中，解析方法通常路子更宽、威力更强、应用起来也更容易，不过，能干的几何学家肯定不挑肥拣瘦，无论哪种方法，只要最适合于所研究的问题就行。

普柔克勒斯（410—485）在其《尤德马斯文摘》①中告诉我们：埃及的开国皇帝、亚历山大博物院②的创建人托勒密·索特，由于在欧几里得门

---

①尤德马斯是公元前四世纪希腊的科学史家，著有算术史、几何史以及天文学史的著作，原件均已散佚。公元五世纪希腊评论家普柔克勒斯著有《评论》一书，主要是对《几何原本》第一卷的内容的进行讲评，其中摘引了尤德马斯的几何著作的内容，可能是引自后人的修改本，后称《尤德马斯文摘》。——译注

②即亚历山大大学，建于公元前300年左右，学者荟萃，百家争鸣，从事文学、历史、艺术、医学、天文、地理、数学的研究，其中尤以数学为主，继承和发扬了古希腊的文化传统。博物院还建有图书馆，据说一度藏书七十五万卷，并向公众开放，因此亚历山大港也是古代抄书行业的中心。——译注

下学习几何，对该院恩泽优隆。他发现这门学科很困难，有一天向他的老师问道："搞这门学问是否有坦荡通途可循？"欧几里德回答道："国王啊，现实世界里有两种道路：平民百姓跋涉之途和帝王专用的御道。几何学上是没有皇家御路的。"既然有很多学生搞代数比搞几何能干得多，所以解析几何也许就是欧几里德认为并不存在的"几何学上的皇家御路"。

有几个传说讲到使笛卡尔冥思苦想解析几何的最初的念头。有个故事说，那是梦中想到的：1619年11月10日，圣马丁节前夕，他服役的那支军队正在多瑙河两岸的冬季营房里休整待命之际，笛卡尔做了三个梦，前后连贯，活灵活现；他说，这三个梦改变了他整个一生的进程，向他揭示出"一种奇妙的科学"和"一个绝妙的发现"，因而使他看清了生活的目的，确定了他将来的努力方向。笛卡尔从来也没有说明这种奇妙的科学和绝妙的发现究竟是什么，不过人们相信，这是指解析几何或代数对几何的应用，然后就是把所有的科学都归结为几何学。直到十八年后，他才在1637年出版的那部名著中阐述了他的某些思想。

还有一个故事也许可以同牛顿看见苹果下落的故事媲美：一天早上，笛卡尔醒了躺在床上，注视着一只苍蝇在屋子一角的天花板上爬来爬去，他发

现苍蝇在天花板上爬过的路线有可能画出来，只要知道苍蝇到相邻两墙的距离之间的关系。这第二个故事即便可能是杜撰的，但也有良好的教育意义。

练习

20·1 证明下列定理：

(*a*) 椭圆内接三角形具有最大面积的充要条件是：三角形的重心与椭圆的中心重合。

(*b*) 在椭圆上截出具有常值面积弓形的弦，其包络是一个椭圆，与原来的椭圆同心、相似且方向相似。

20·2 (*a*) 列举若干用笛卡尔直角坐标系处理问题时有用的公式。

(*b*) 你举出的那些公式在笛卡尔斜坐标系中哪些仍然成立？

20·3 (*a*) 试对寇芒底诺定理给以解析证明。

(*b*) 试对寇芒底诺定理给以综合证明。

20·4 (*a*) 四面体一双相对棱中点的联线叫做该四面体的**对棱中线**。试用解析方法证明：四面体的重心① 是该四面体任何对棱中线的中点。

① 即四面体四条中线的公共交点。——译注

(*b*) 证明：四面体两双相对棱的平方和等于其余两条相对棱的平方和再加上四倍最后这两条相对棱的对棱中线的平方。

(*c*) 证明：四面体诸棱的平方和等于其对棱中线的平方和的四倍。

20·5 点P离已知直角三角形斜边距离的平方等于它离两条直角边距离之积，试求点P的轨迹。

20·6 用解析方法证明：三角形的三条高线共点。

20·7 (*a*) 用解析方法证明：任何平面四边形四边的中点是一个平行四边形的顶点。

(*b*) 如果四边形不是平面四边形，上述结果是否仍然成立？

20·8 海盗按下述方式在岛上埋藏一宗财宝：海岸附近有两个大礁石、一棵孤独的棕榈树，海盗甲从一个礁石出发，沿着该礁石与棕榈树联线的垂线前进，踱步截取一段距离，等于礁石与棕榈树间的距离；海盗乙对另一礁石及棕榈树如法炮制，然后把财宝埋在两海盗所在位置联线的中点处。几年以后，海盗返岛掘宝，但发现棕榈树已不复存在。船上有个小伙子学过初等解析几何，为海盗查明了宝藏所在。他是如何行事的？

20·9 在已知三角形ABC的三边上BC，CA，AB上选取三点D,E,F，使得$BD/BC=CE/CA=AF/AB$

=1/3。证明：AD，BE，CF这三条直线构成的三角形，其面积为已知三角形面积的七分之一。

20·10 常值长度的线段AB的端点A和B沿两条互相垂直的直线移动。试求把AB分成定比的点P的轨迹。

进一步的读物

Boyer, C.B., *History of Analytic Geometry*. New York: *Scripta Mathematica*, Yeshiva University, 1956.

Coolidge, J.L., *A History of Geometrical Methods*. New Yok: Oxford University Press, 1940.

Mahoney, M.S., *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*. 1601-1665. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1972.

Smith, D.E., and Marcia L.Latham, eds., *The Geometry of René Descartes*. New York: Dover, 1954.

练习解答提要

1·3 这里是数的名称，来源于从前用来表示数的某些手势。

1·4 丈夫和妻子是睡在同一床垫上的。

1·6 (b)利用$n \longleftrightarrow 2n$这个一一对应关系，这里n是任何正整数。

1·7 所述性质直接从集合的并运算的交换性和结合性推出。

1·8 设A，B，C是任何三个集合。对应关系$(a, b) \longleftrightarrow (b, a)$，$a \in A$，$b \in B$，确定交换性，对应关系$(a, (b, c)) \longleftrightarrow ((a, b), c)$，$a \in A$，$b \in B$，$c \in C$确定结合性。然后证明$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$。于是，若$B$和$C$没有公共元素，$\alpha, \beta, \gamma$分别表示$A$，$B$，$C$的基数，则$A \times (B \cup C)$的基数为$\alpha(\beta+\gamma)$，而$(A \times B) \cup (A \times C)$的基数为$\alpha\beta+\alpha\gamma$。

1·9 若A有n个元素，则A含有2^n个子集，因为在构成A的一个子集时，对于A的n个元素中的每一个，我们都有两种选择，即是含有或不含有该元

素①。

1·10 若A有m个元素，B有n个元素，则$A\cap B$有p个元素，$0\leqslant p\leqslant \min(m,n)$，而$A\cup B$有$q$个元素，$\max(m,n)\leqslant q\leqslant m+n$。

2·1 (b)这时$s=r$，$c=2r$，r是圆半径。

(c)若r是圆半径，θ是该弦张成的中心角之半，我们有$r=(4s^2+c^2)/8s$，$\theta=\sin^{-1}(c/2r)$，$A=r^2\theta-c(r-s)/2$。

2·2 (a) 令$\pi r^2=(8d/9)^2=(16r/9)^2$，$d$是圆的直径，$r$是半径。

2·3 若r是圆半径，我们取$\dfrac{6r}{2\pi r}=\dfrac{57}{60}+\dfrac{36}{3600}=\dfrac{576}{600}$。

2·4 (a) 设四边形为$ABCD$，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$。于是

$$
\begin{aligned}
4K &= ab\sin B+bc\sin C+cd\sin D+da\sin A\\
&\leqslant ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)
\end{aligned}
$$

(b)在2.4(a)的公式中令$d=0$。

---

① A的每个子集X都有它的特征函数f_X与之相应：

$$
f_X(a)=\begin{cases}1, & a\in X,\\ 0, & a\overline{\in} X,\end{cases}
$$

由此可见，A的所有子集与把A映入二元集$\{0,1\}$的所有映像f：$A\to\{0,1\}$成一一对应，而后者的个数是2^n，因为每个f由$f(a_1)$，…，$f(a_n)$确定，各$f(a_i)$可以有0，1两种选择，这里a_1，…，a_n表示A的n个元素。——译注

2·5 取$\pi=3$。于是，若r为圆半径，则$2r=60/3$。弦c的矢长s为2。我们有$c^2=(2r)^2-(2r-2s)^2$。

2·6 我们有$\pi d^2=4s^2$。

2·7 从$|\sqrt{m}-\sqrt{n}|\geqslant 0$出发。

2·8 把平截头棱锥补全成棱锥，所以平截头棱锥的体积就是补全棱锥与附加棱锥体积之差。

3·2 在金字塔附近竖立一根长度为s的铅直杆，设S_1，P_1和S_2，P_2分别表示杆顶和金字塔顶在一天两个不同的时刻的阴影点，x是所求金字塔的高度，则有$x=s(P_1P_2)/(S_1S_2)$。

3·3 (*a*) 过三角形一顶点画直线平行于对边。

3·4 (*g*) 对3·4 (*f*) 应用极限概念。

3·6 把三个顶点折叠到一条高线的垂足上，或者折叠到三角形的内心上。有理由相信，巴斯卡尔使用的是后一种方法。

3·9 这个公式对所有凸多面体都成立，更一般地，对所有可以连续变形为球的多面体也都成立。

3·10 不能继续列举下去：任何凸多面体的面不可能全都是六边形。事实上，可以证明：任何凸多面体一定有一个面，其边数小于6。

3·11 (*b*)设D为P的表面上一点，使得距离CD为极小。再证明D既不能是P的顶点，也不能在P的一条棱上，并且CD垂直于D所在的那个面F。

3·12 任何一个式子都不能给出E。椭圆求长涉及第二类勒让德椭圆积分，不能用初等函数表示。

3·13 见The American Mathematical Monthly, Aug.-Sept. 1947，问题E753。

3·14 否。只有所谓**垂心四面体**的四条高线才共点。垂心四面体是指四面体的每一条棱均垂直于与之相对的棱。

4·1 见图70。

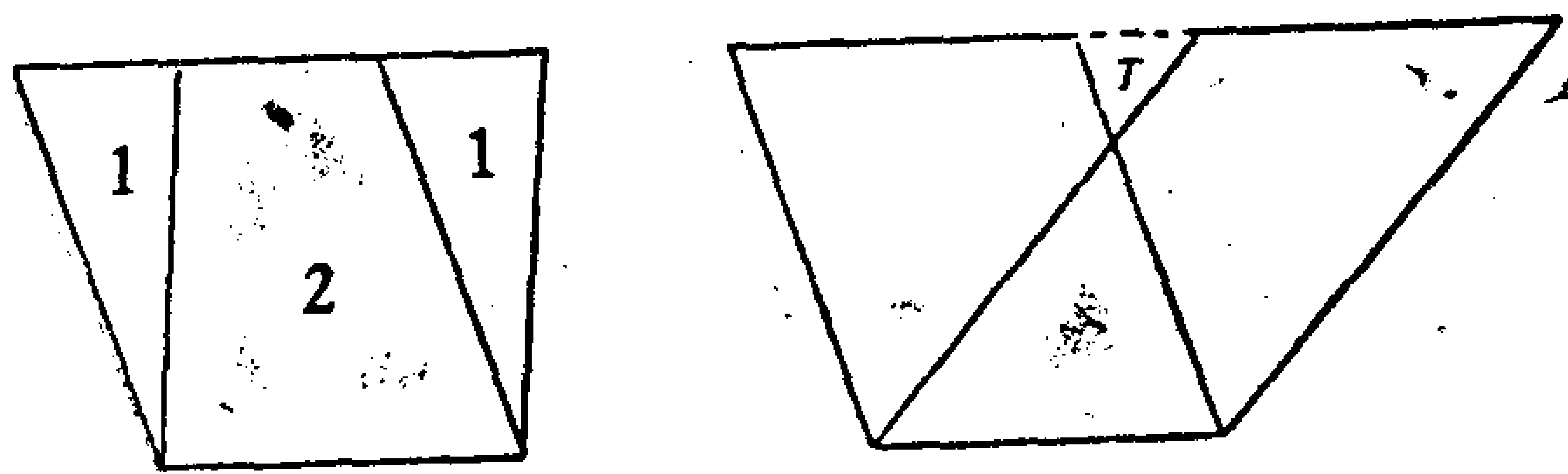


图 70

4·2 见图71。

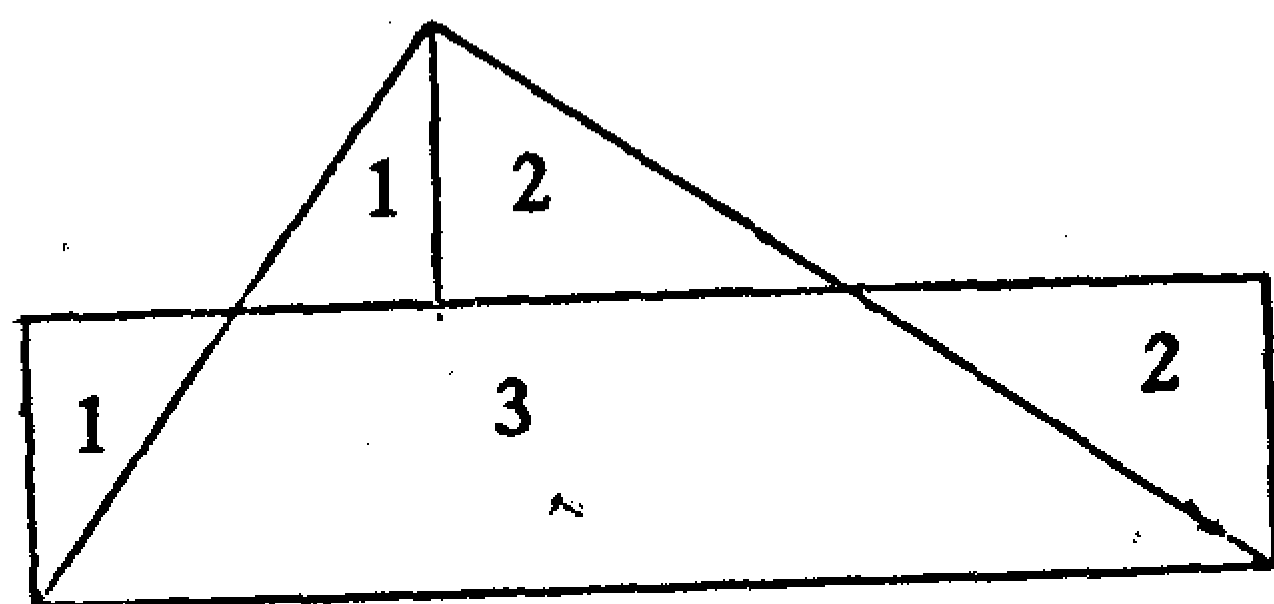


图 71

4·4 (b)注意，短边上的正方形未经分解。

4·5 (b)勾、股为 3 和4的四个直角三角形，再添上那个小的单位正方形，构成了面积为25的一个正

方形，所以勾、股为 3 和 4 的直角三角形之弦为 5。由于三角形由三条边确定，可见3-4-5的三角形是直角三角形。

4·7 (*a*)把四面体置于第一卦限，直角顶点位于原点，底面的三顶点是$A=(a,0,0)$，$B=(0,b,0)$，$C=(0,0,c)$。于是，平面ABC的方程是

$$bcx+cay+abz=abc,$$

高为

$$h=abc/(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)^{\frac{1}{2}},$$

所以

$$\begin{aligned}1/h^2&=(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)/a^2b^2c^2\\&=1/a^2+1/b^2+1/c^2.\end{aligned}$$

(综合几何的证明，例如见Nathan Altshiller-Conrt, Modern Pure Solid Geometry, 2nd ed., Chelsea, New York, 1964tTheorem 285, p. 101.)

(*b*)底面ABC的面积是

$$ABC=3\,(\text{四面体体积})/h=abc/2h,$$

所以

$$\begin{aligned}(ABC)^2&=a^2b^2c^2/4h^2\\&=(a^2b^2c^2/4)(1/a^2+1/b^2+1/c^2)\\&=(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)/4\\&=(OBC)^2+(OCA)^2+(OAB)^2.\end{aligned}$$

4·8 圆$AB'C$在A点与AB相切，圆$AC'B$在A点与AC相切，所以 $(AB)^2=(BC)(BB')$， $(AC)^2=(BC)(CC')$。

当$\angle A=90°$时，B'和C'都重合于自A所作高线的垂足。

4·9 $\cos c=(\cos a)(\cos b)$。

4·10 三角形的三边a，b，c如果满足$a^2+b^2=c^2$，则该三角形为直角三角形，其弦为c。

设勾、股为a，b的直角三角形之弦为d，则有$d^2=a^2+b^2=c^2$，所以$d=c$，可见已知三角形全等于这个直角三角形。

5·1 (b)设AC和BC关于AP可公度（见图72），然后证明DE和DB关于AP也可公度，继此以推。

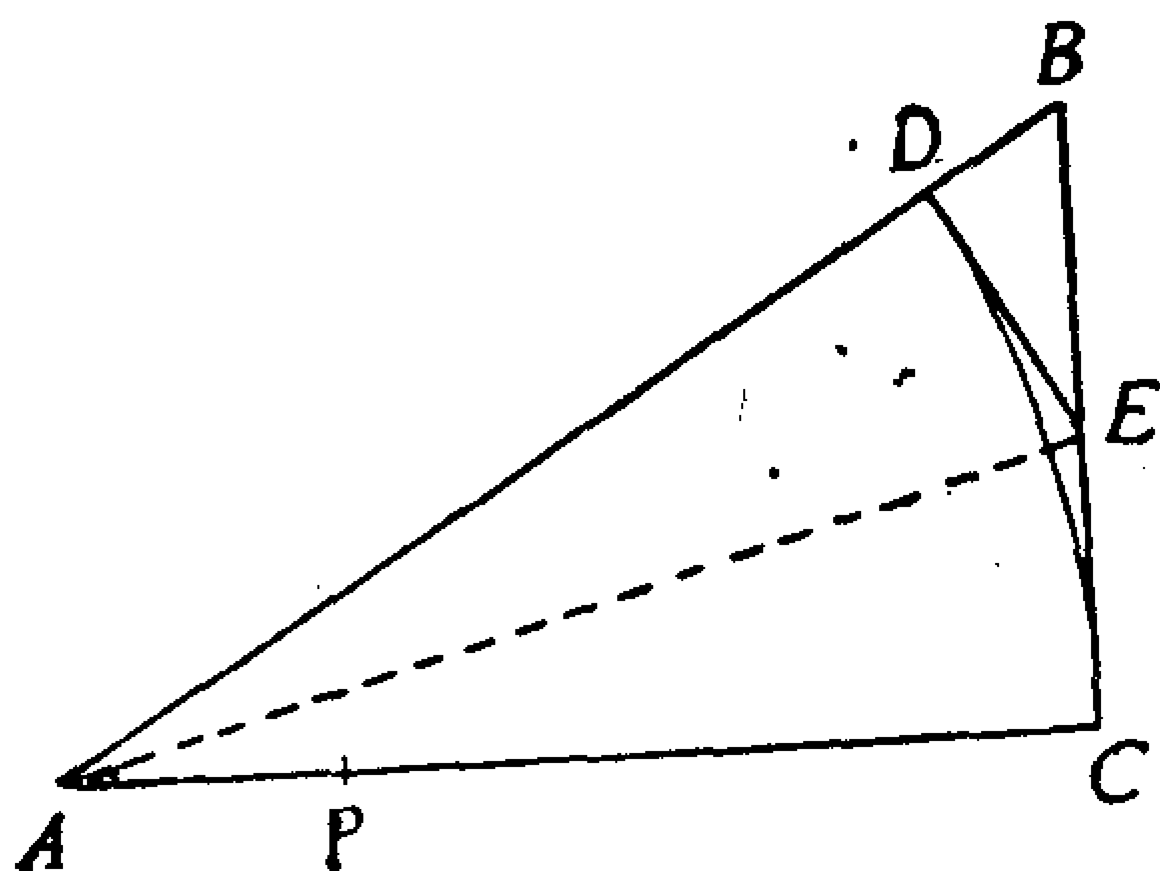


图72

5·2 (a)若该直线上有坐标格子点（p，q），则有$\sqrt{2}=q/p$为有理数。

5·3 设$\sqrt[n]{p}=a/b$，这里a和b为互素的整数。

5·4 (a)设$\log_{10}2=p/q$，这里p和q都是整数。于是我们有$10^p=2^q$，这是不可能的。

5·5 (a)设此和为有理数。

(b)设此积为有理数。

5·6 (a)如图73所示，等腰三角形DAC和GDC相似，所以$AD:DG=DC:GC$，从而$DB:DG=DG:GB$。

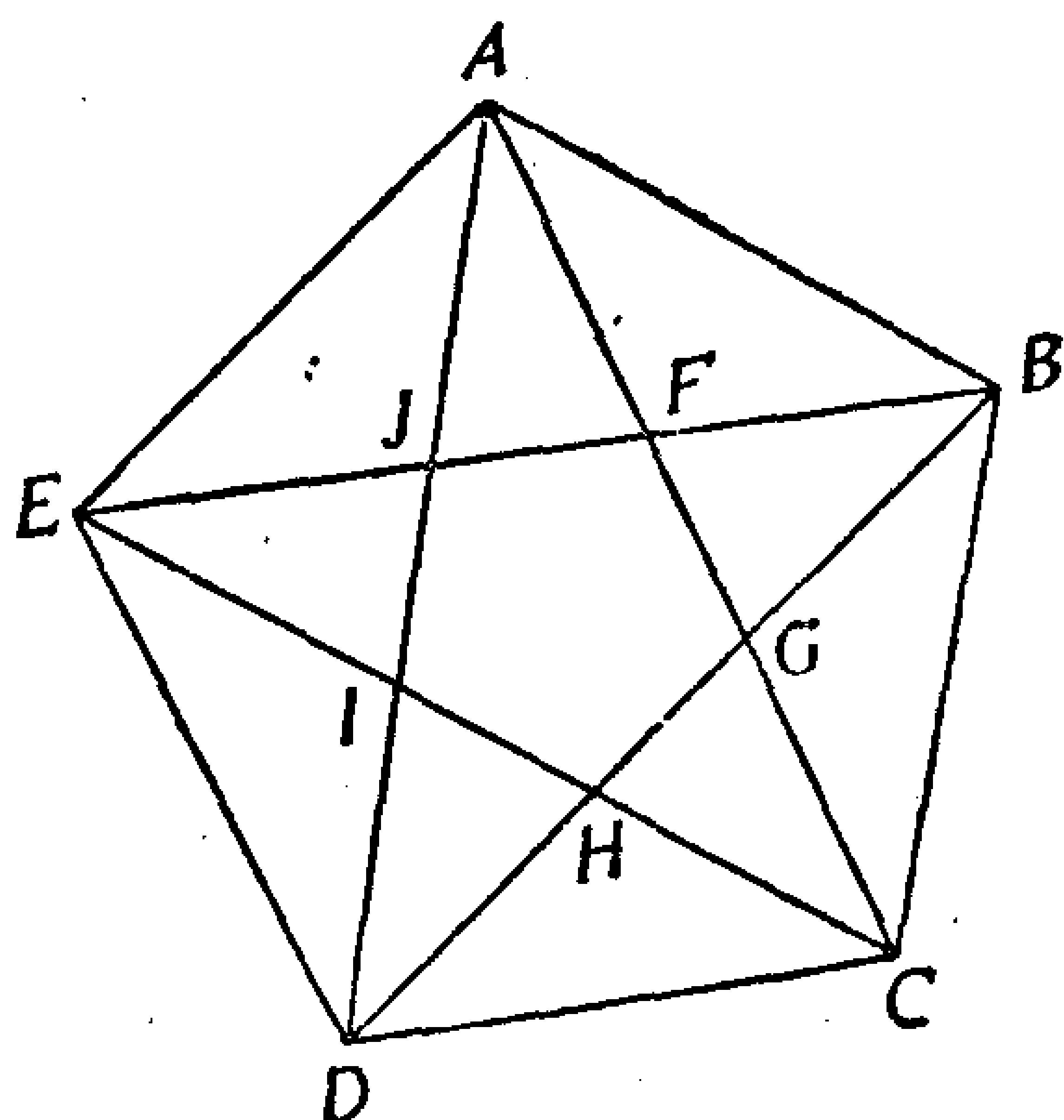


图 73

(b) $AG:AH=AG:GB=AB:AG=(AB-AG):(AG-AH)=GB:HG=AH:HG$。

(c)设a和b表示所说矩形的长和宽，于是

$$\frac{a-b}{b}=\frac{a}{b}-1=\frac{2}{\sqrt{5}-1}-1=\cdots=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

5·7 (a)设图73中HG是已知边。作直角三角形PQR，两条直角边PR和QR各为HG和$HG/2$。延长

PQ，截取$QT=QR$。于是$PT=GB=GC=HC$，再继续进行。

(b)设图73中DB是已知对角线，作直角三角形PQR，两条直角边PR和QR各为$DB/2$和DB。在PQ上截取$PT=PR$。于是$TQ=DG=DC$，再继续进行。

$$(c)\frac{360°}{15}=24°=2(72°-60°).$$

(d)由于r和s互素，所以存在正整数p和q，使得$pr-qs=\pm1$，因此，正s边形中由p条边张成的中心角与正r边形中由q条边张成的中心角之差为

$$p(360°/s)-q(360°/r)$$
$$=(pr-qs)(360°/rs)=\pm360°/rs.$$

(e)设p，d，h分别表示单位圆内接正五边形、正十边形和正六边形的边长，于是$h=1$，$d=(\sqrt{5}-1)/2$。设等腰三角形两腰为1，底为d，一条腰上所作高线为t，底边在这条腰上的投影为m。于是

$$m^2=d^2-t^2,\ t^2=1-(1-m)^2,$$

由此可得$p^2=4t^2=4d^2-d^4$，接着再证明$p^2=h^2+d^2$。

5·8 (a)按照十进位除法，一个整数除以另一个整数产生一系列的余数。如果我们得到一个余数是零，小数表示即告终了；否则我们就有一序列无穷

多个非零余数，每一个都比除数小。由于只有有限多个这样的余数，所以我们迟早会得到早先已经出现过的余数，这就得到一个循环的小数表示。

(c)令$x=3.2\overline{39}$，$y=0.\overline{39}$，于是$10x=32+y$，$1000x=3239+y$。消去y得到$990x=3207$。即$x=3207/990$。

5·9 (a)因为该小数表示既不终止也不循环。

(b)因为该小数表示既不终止也不循环。

6·2 (a)利用下述事实：一组平行线如果在一条截线上截出相等的线段，那么在另一条截线上也截出相等的线段。

(b)设三角形为ABC，MN平行于边BC，M在AB上，N在AC上。由于$\triangle MNB$和$\triangle NMC$有公共边MN以及这条边上相等的高，所以它们的面积相等。于是，利用讲演正文中已经证明的那个定理，我们有

$$AM:MB=\triangle ANM:\triangle MNB=\triangle AMN:\triangle NMC=AN:NC。$$

6·4 (a)否，条件（3）不成立。

(b)否，条件（2）不成立。

(c)否，条件（1）不成立。

(d)可。

(e)可。

6·5 使用“归谬法”。

6·6 (a)设p_n表示圆内接正n边形的周长，圆的周长c定义为$\lim_{n\to\infty} p_n$。

(b)设a_n表示圆内接正n边形的面积，圆面积A定义为$\lim_{n\to\infty} a_n$。

6·7 π和$\pi/4$。

6·8 (a)设p为曲线上已知点，Q为曲线上邻近的点。曲线在P处的切线PT定义为割线PQ当Q沿曲线移动趋近于极限P时的极限位置，只要这个极限存在。

(b)设c为曲面S上一条曲线，过S上的已知点P，再设PT是c在P处的切线，只要它存在。当S在P处光滑时，可以证明：S上过P处所有这种曲线c的切线都存在，且在同一平面上。这张平面就是S在P处的切平面。

7·4 那位木工修好一把椅子。

7·6 据题材公理演绎体系格式的(B)条，由于对论说的原始术语预先做了说明，公设是能够得到读者认可的真实陈述。

7·7 利用下述事实：四个事物每次取两个的组合数是6。

7·8 检查所有可能的情况。

7·9 设第一个局中人把他的头一支雪茄烟放在

桌上，使雪茄烟的中心正好与桌面的中心重合，自此以后他放雪茄烟的位置正好与第二个局中人雪茄烟的位置成中心对称。

7·10 在国际象棋中，白方先走。在A出着以后，B在另一棋盘上对C的一局中完全仿照A的着数；在C应了B的着数以后，B就在第一个棋盘上对A的一局中完全仿照C的着数来应A的着数。

8·1 选择 2 和 3。

8·4 (a) 73。

(b) 29。

(c)假设$a>b$。于是辗转相除法可以总结如下：

$$
\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1, & 0 < r_1 < b,\\
b &= q_2 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1,\\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2,\\
&\cdots\cdots\\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1},\\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n.
\end{aligned}
$$

从最后一步可见，r_n整除r_{n-1}。从倒数第二步可见，r_n整除r_{n-2}，因为r_n整除右端的两项。同理，r_n整除r_{n-3}。继此以推，r_n整除每个r_i，最后整除a和b。

另一方面，从第一步可见，a和b的任何公因子c都整除r_1。从第二步可见，c也整除r_2，继此以推，

c整除每个r_i，所以c整除r_n。

(d)从辗转相除法倒数第二步可见，r_n可以用r_{n-1}和r_{n-2}线性表示。从倒数第三步可见，r_n又可用r_{n-2}和r_{n-3}线性表示。继此以推，r_n最终可用a和b线性表示。

(e) $-7(7592)+9(5913)=73$。

(f) a与b互素的充要条件是：

$$g.c.d.=h=1.$$

8•5 (a)如果p不能整除u，则存在整数P和Q，使得$Pp+Qu=1$或$Ppv+Quv=v$。

(b)假设整数n有两个素因子分解，p是第一个因子分解中的一个素因子，则据问题(a)，p必定整除第二个因子分解中的一个素因子，也就是说，p必定等于其中一个因子。

(c)注意，$273=(13)(21)$。求整数p和q，使得$13p+21q=1$〔见练习8.4(f)〕，除以273我们得到$p/21+q/13=1/273$。同法求整数r和s，使得$1/21=r/3+s/7$。

8•6 (c) 因为问题(b)中每个b_i可以取a_i+1个值。

(d) a为完全平方数的充要条件是：所有的a_i都是偶数；所有的a_i都是偶数的充要条件是：问题(c)中那个乘积是奇数。

(f)由于b整除ac，我们有$b_i \leqslant a_i+c_i$。此外，

由于a与b互素，我们有$a_i=0$，否则就有$b_i=0$，所以无论如何有$b_i \leqslant c_i$。

(g) 由于a整除c，所以$a_i \leqslant c_i$。由于b整除c，所以$b_i \leqslant c_i$。由于a与b互素，所以$a_i=0$，否则就有$b_i=0$。由此可见$a_i+b_i \leqslant c_i$。

(h) 假设$\sqrt{2}=a/b$，这里a和b都是正整数。于是，由于$a^2=2b^2$，我们有$(2a_1, 2a_2, \cdots)=(1+2b_1, 2b_2, \cdots)$，因而$2a_1=1+2b_1$，这是不可能的。

8·7 欧几里德认为圆是指一个实心圆盘①。

8·8 (b) 设A是已知点，BC是已知线段。据 Ⅰ.1 作等边三角形ABD。画圆$B(C)$ ②，延长DB与该圆相交于G。画圆$D(G)$与DA的延长线相交于L。于是AL就是所求的线段。

8·9 (a) 见图74。

(b) 见图75。

(c) 见图76。

(d) 见图77。

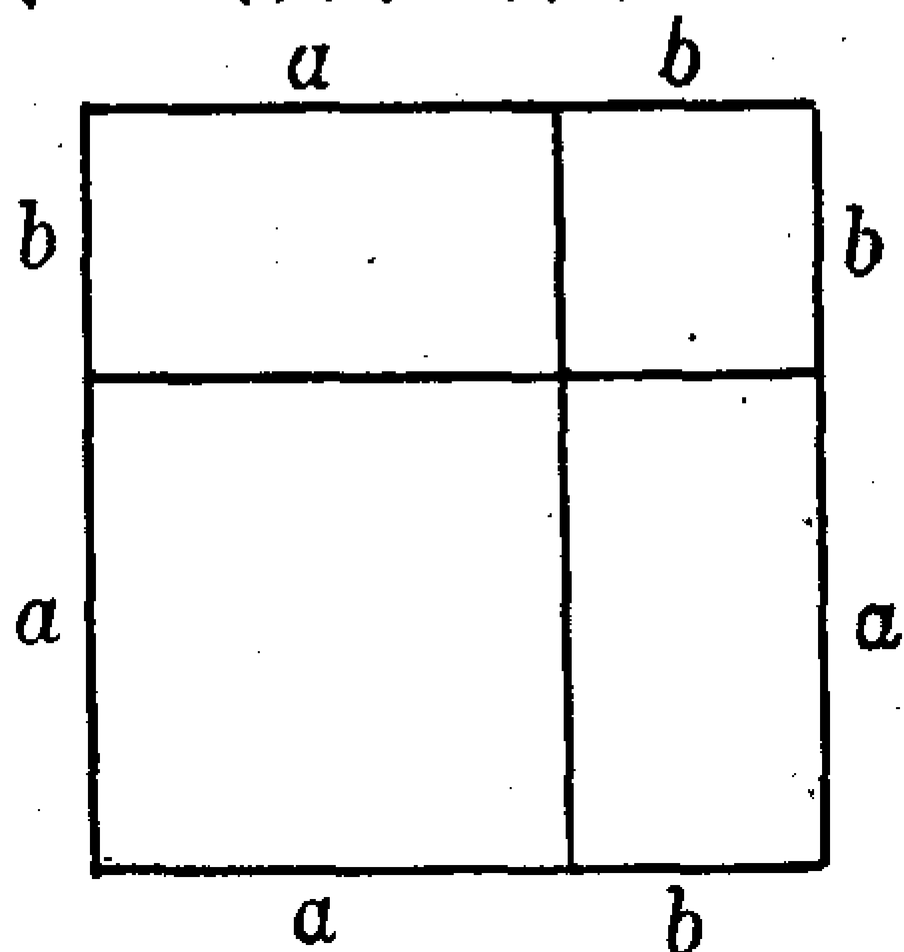


图74

① 这里只是说明《几何原本》中圆的定义有缺点，而不是说欧几里德在《几何原本》中涉及圆的其他各处也都采用这个定义，相反，他仍然认为圆是指圆盘的周界曲线，否则有关的演绎就不成立了。例如，公设3中的圆就应该是指曲线而不是圆盘。——译注

② $B(C)$表示以已知点B为心、过已知点C的圆. 这个记号不同于$B(BC)$，即以B为心、以BC为半径的圆。——译注

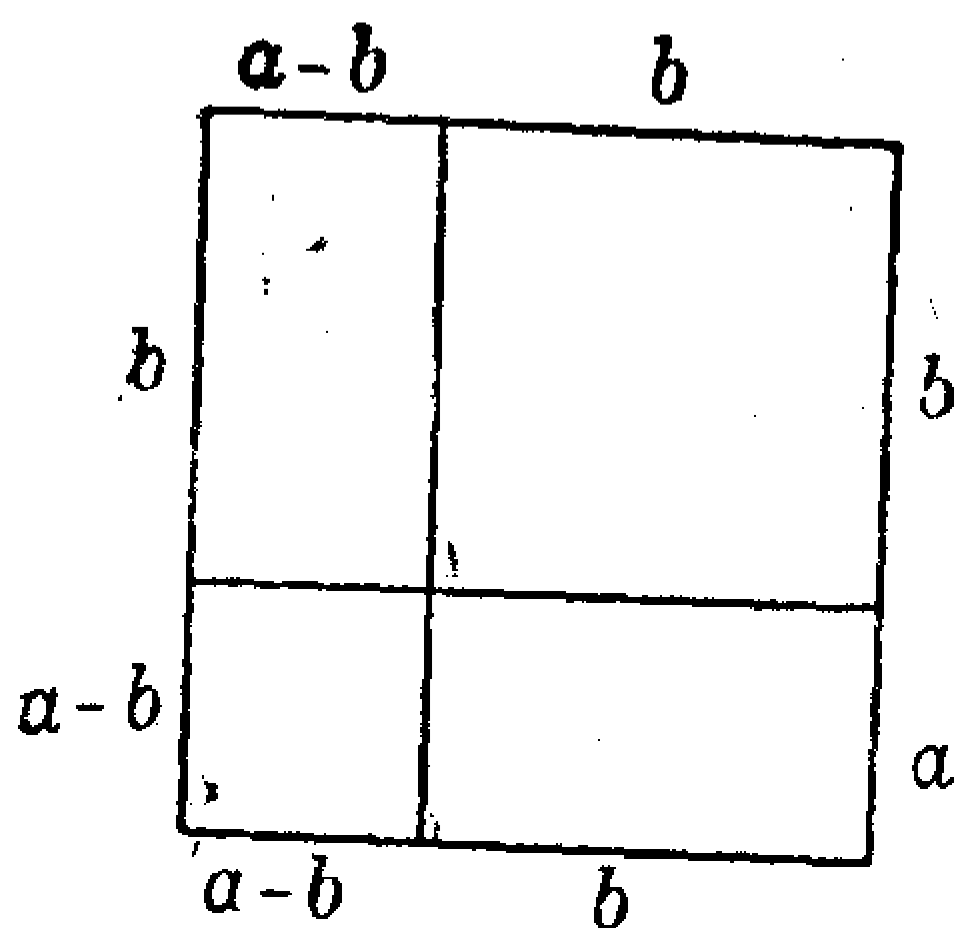


图 75

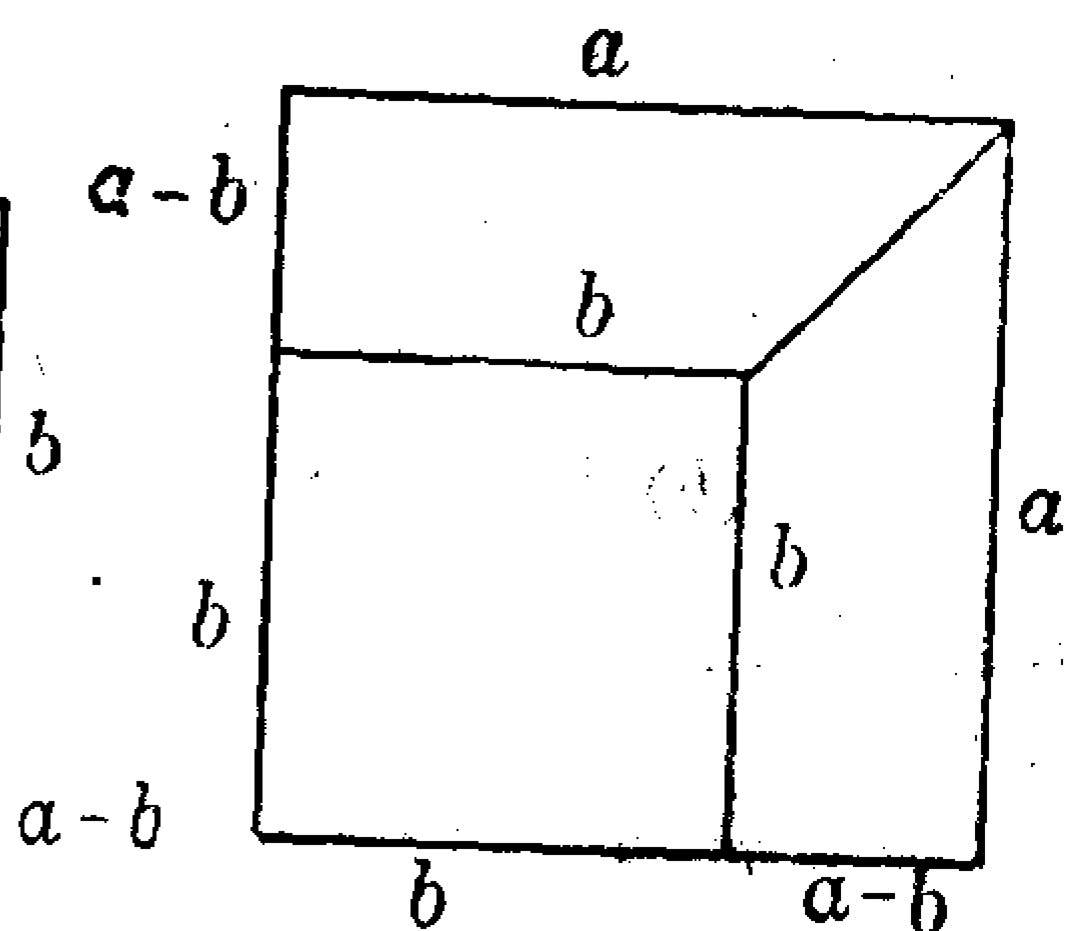


图76

8·10 (a)我们有 $(x-r)(x-s)=x^2-px+q^2$。

(h)把这两部分记为x和$a-x$，于是$x^2-(a-x)^2=x(a-x)$，即$x^2+ax-a^2=0$。

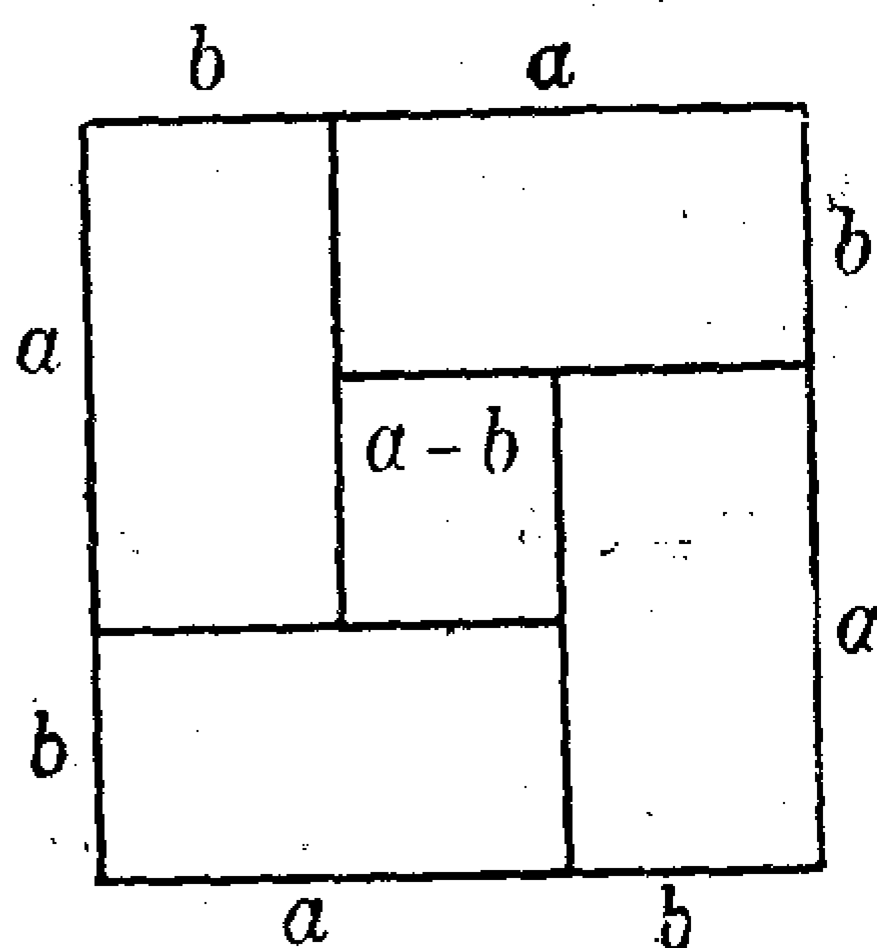


图 77

9·1 (a) w_1磅纯金在水中称将减轻w_1f_1/w磅；w_2磅纯银在水中称将减轻w_2f_2/w磅，所以$w_1f_1/w+w_2f_2/w=f$。

(b) $f:f_1:f_2=v:v_1:v_2$。

9·2 $(\pi r^2)(2r)=(3/2)V$,

$(2\pi r)(2r)=(3/2)A$。

9·3 查阅中学立体几何课本。

9·4 如果a是生成弧所对的弦，则 $a^2=$

$(2r)(h)$.

9·5 (a) 球冠体积等于相应球锥体积减去一个圆锥的体积。此外，$a^2 = h(2r-h)$.

(b)球台是两个球冠之差，设其高度各为 u 和 v。于是

$$V = \pi r(u^2 - v^2) - \frac{\pi(u^3 - v^2)}{3}$$

$$= \pi h[(ru + rv) - \frac{u^2 + uv + v^2}{3}] .$$

但 $u^2 + uv + v^2 = h^2 + 3uv$, $(2r-u)\ u = a^2$ 以及 $(2r-v)v = b^2$，所以

$$V = \pi h\ (\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{u^2 + v^2}{2} - \frac{h^2}{3} - uv)$$

$$= \pi h\ (\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{h^2}{2} + uv - \frac{h^2}{3} - uv) .$$

9·6 (a)我们有 $(OM)(AO) = (OP)(AC)$。求和可得

(弓形面积)(HK) = $(\triangle AFC)(KC/3)$。

(b)$\triangle AVC = (\triangle AWC)/2 = (\triangle AFC)/4$.

9·7 作CO,利用三角形的外角等于两个不相邻内角之和这一事实。

9·8 如图78所示，OP = 弧AB。于是，如果取OP垂直于OA，则OP之长等于圆周的四分之一。由

于圆面积K是半径与周长乘积之半，所以有

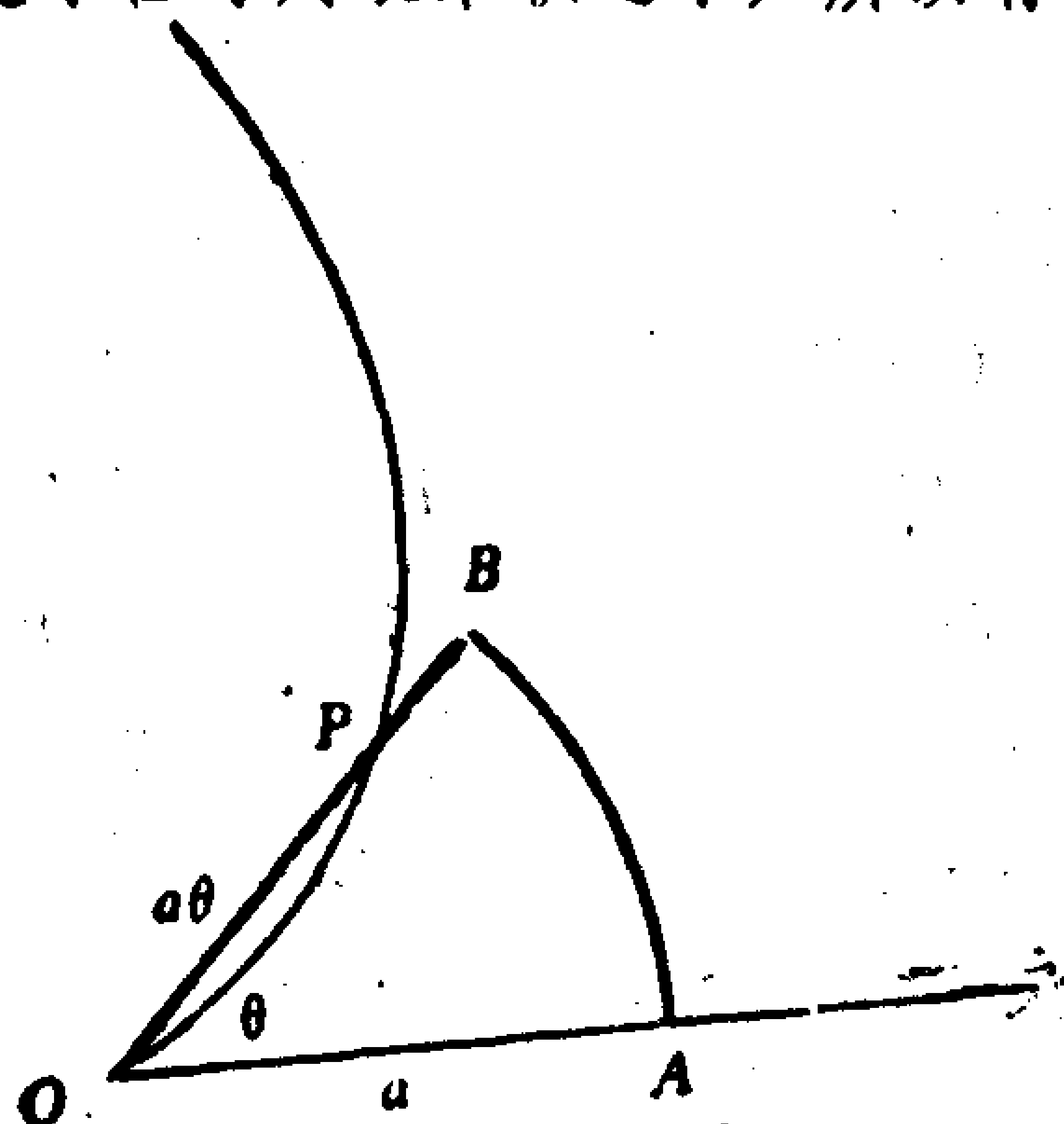


Fig. 78

图 78

$$K=(a/2)(4OP)=(2a)(OP),$$

而所求正方形的边长就是$2a$与OP间的比例中项，也就是圆的直径与螺旋线上垂直于OA的向径之长的比例中项，

9·9 设OB与螺旋线交于P，用点P_1和P_2把线段OP三等分。如果圆$O(P_1)$与$O(P_2)$交螺旋线于T_1与T_2，则OT_1与OT_2把角AOB三等分。

9·10 (*a*)延长CB至E，使$BE=BA$。然后证明三角形MBA与MBE全等。

10·3 (*a*)取三角形的一边为一单位，应用托勒致定理于四边形$PACB$。

(*b*)取正方形的一边为一单位，应用托勒

致定理于四边形$PBCD$与$PCDA$。

(c)取正五边形的一边为一单位，应用托勒玫定理于四边形$PCDE$，$PCDA$，$PBCD$。

(d)取正六边形的一边为一单位，应用托勒玫定理于四边形$PBCD$，$PEFA$，$PBCF$，$PCFA$。

10·4 (a)假设（见图79）D，E，F共直线m，自A，B，C作m的垂线p，q，r。于是，不计符号有

$$BD/DC=q/r,\quad CE/EA=r/p,\quad AF/FB=p/q.$$

再考虑有向线段则有

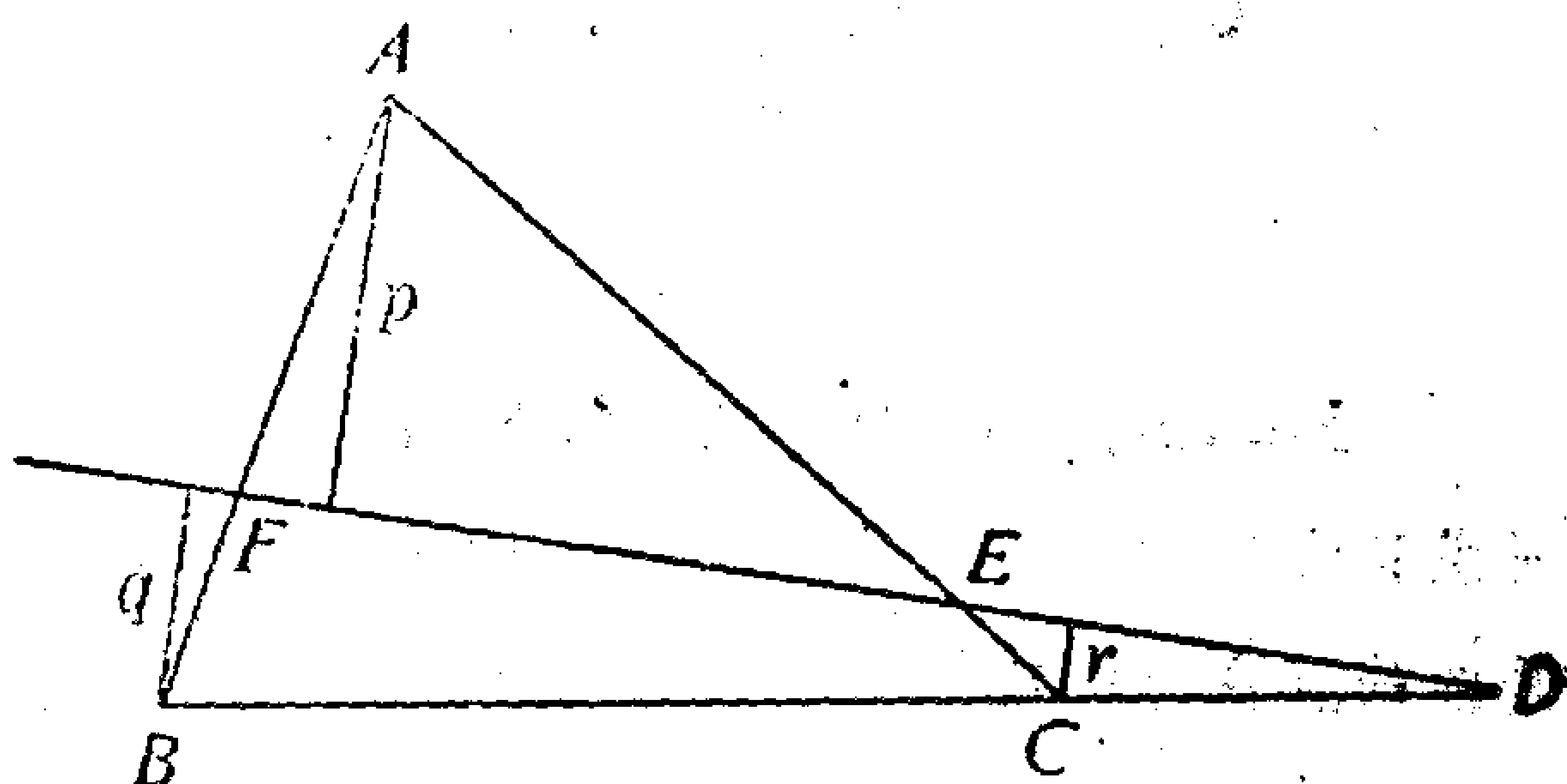


图 79

$$(BD/DC)(CE/EA)(AF/FB)=\pm 1.$$

但是，由于m必定外分三角形的一条边或所有三条边，所以我们只能有负号。

反之，假设

$(BD/DC)(CE/EA)(AF/FB)=-1$，且直线EF分BC于D'。于是D'是麦尼雷斯点，据上所证有

$(BD'/D'C)(CE/EA)(AF/FB) = -1$.由此可见$BD/DC = BD'/D'C$，所以$D \equiv D'$。这就证明了$D$，$E$，$F$共线。

10.4.(b)设h表示自O到直线BC所作垂线之长，读者可以验证：对所有可能的图形均有

$$\frac{BD}{DC}=\frac{hBD}{hDC}=\frac{2\triangle OBD}{2\triangle ODC}=\frac{(OB)(OD)\sin\angle BOD}{(OD)(OC)\sin\angle DOC}$$

$$=\frac{OB\sin\angle BOD}{OC\sin\angle DOC}.$$

10·4 (c)利用10.4(b)。

(d)在10.4.(c)的图形中以O为心画球，与OA，OB，OC，OD，OE，OF相交于A'，B'，C'，D'，E'，F'。

10·5 (a)过三角形那条高线经过的顶点作外接圆直径，再利用相似三角形。

(b)应用10.5 (a) 于三角形DAB与DCB。

(c) 利用10.5 (b) 的结果以及托勒玫关系$mn = ac + bd$。

(d) 这时$\theta = 0°$，$\cos\theta = 1$，利用10.5 (b) 和10.5 (c) .

(e) 利用10.5 (a) .

11·1 (b) 对于$n = 2$我们得到毕达哥拉斯发现的那对互亲数220及284；对于$n = 4$我们得到费马发现的一对互亲数17296及18416。

11·2 (*a*) 证明$2^{ab}-1$含有因子2^a-1。

(*b*) 8128。

(*c*) 若a_1，a_2，…a_n表示N的所有因子。则N/a_1，N/a_2，…，N/a_n也表示N的所有因子。

11·3 (*a*) p^n的真因子之和是$(p^n-1)/(p-1)$。

11·4 (*a*) 1，6，15，28。

(*b*) $T_n=1+2+\cdots+n$，$P_n=1+4+7+\cdots+(3n-2)$。

(*c*) 利用11.4 (*b*)。

(*d*) 长方形数的形式是$a(a+1)$。

(*f*) 见图80。

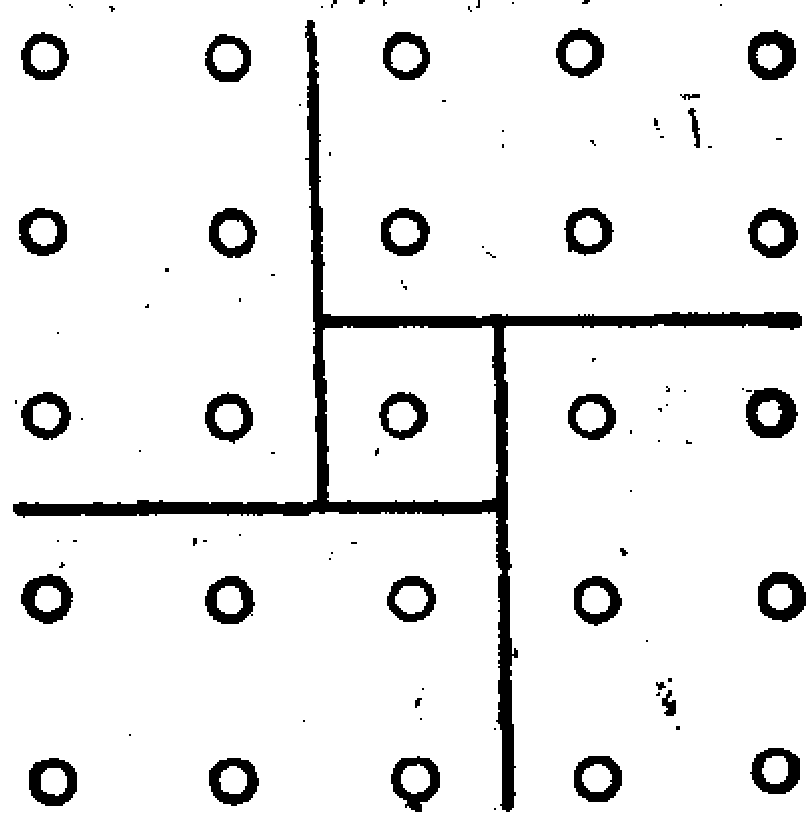


图80

(*g*) $2^{n-1}(2^n-1)=2^n(2^n-1)/2$。再利用11·4 (*b*)。

(*h*) $a=(m-2)/2$，$b=(4-m)/2$。

(*i*) $a=5/2$，$b=-3/2$。

11·5 (*b*) 若p为合成数，则$p=ab$，这里$a\leqslant b$，从而$a^2\leqslant p$。

(*c*) 对于$n=10^9$我们有$(A_n\log_e n)/n=1.053\cdots$。

(d) 考虑 $(n+1)!+2$，$(n+1)!+3$，…，$(n+1)!+(n+1)$。

11·6 (a) $(2m)^2+(m^2-1)^2=(m^2+1)^2$。

(b)若存在边长为整数的等腰直角三角形，则$\sqrt{2}$将为有理数。

(c) 若存在正整数a，b，c $(a\neq 1)$，使得$a^2+b^2=c^2$且$b^2=ac$，则a，b，c不可能互素。但是，如果存在一个毕达哥拉斯三数组，使得其中一个整数是另外两个的比例中项，那么必定存在这样的原始毕达哥拉斯三数组。

(e) 证明：如果$a^2+(a+1)^2=c^2$，

则

$$(3a+2c+1)^2+(3a+2c+2)^2=(4a+3c+2)^2.$$

(f) 利用11.6 (e)。

(g) 若n为奇数且大于2，则$(n, (n^2-1)/2, (n^2+1)/2)$是毕达哥拉斯三数组。若$n$为偶数且大于2，则$(n, n^2/4-1, n^2/4+1)$是毕达哥拉斯三数组。

(h) 由于$a^2=(c-b)(c+b)$，可见$b+c$是a^2的因子。因此$b<a^2$，$c<a^2$，而这样的自然数b和c的组合数是有限的。

11·7 (a) 7，4，11，9。

(b) 令$CD=3x$，$AC=4x$，$AD=5x$，

$CB=3y$。于是，由于$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{CD}$，我们有$AB=4(y-x)$。据毕达哥拉斯定理得$7y=32x$，最后得到$AB=100$，$AD=35$，$AC=28$，$BD=75$，$DC=21$。

(*d*) 1806。

11·8 (*b*) 容易证明：$x=x_1+mb$，$y=y_1-ma$是一个解。反之，设x与y是一个解，则$a(x-x_1)=b(y_1-y)$，或$x-x_1=mb$，$y_1-y=ma$。

(*c*) 除以7得到

$$x+2y+(\frac{2}{7})y=29+\frac{6}{7}.$$

因此存在整数z，使得

$$(\frac{2}{7})y+z=\frac{6}{7}$$

即

$$2y+7z=6.$$

这个方程可以视察求解得$z_1=0$，$y_1=3$。于是$x_1=23$。于是，据11.8 (*b*)，原方程的一般解是

$$x=23+16m,\quad y=3-7m.$$

据要求有$x>0$，$y>0$，所以必须$m\geqslant-1$且$m\leqslant0$，因而m可取的值只有0和-1，从而我们得到两个解

$$x=23,\ y=3\ 和\ x=7,\ y=10.$$

也可以照练习8.4（f）求a与b，使得$7a+16b=1$。然后再取$x_1=209a$，$y_1=209b$。

（d）存作四个解：$x=124$，$y=4$；$x=87$，$y=27$；$x=50$，$y=50$；$x=13$，$y=73$。

（e）设x表示10分硬币个数，y表示25分硬币个数，则必有$10x+25y=500$。

11.9. 设x表示一堆果子的个数，y表示每人分到的果子数，则有$63x+7=23y$。于是x的最小值是5。

11·10（a）设$n=ab$，如果$x^n+y^n=z^n$，则有$(x^a)^b+(y^a)^b=(z^a)^b$。

（b）设曲线上有点（a/b，c/d），这里a，b，c，d都是整数，则有$(ad)^n+(bc)^n=(bd)^n$。

（c）考虑直角三角形，其边长为

$$a=2mn,\quad b=m^2-n^2,\quad c=m^2+n^2.$$

该三角形的面积是

$$A=\frac{(ab)}{2}=mn\ (m^2-n^2).$$

取$m=x^2$，$n=y^2$，令$x^4-y^4=z^2$，则有

$$A=x^2y^2\ (x^4-y^4)\ =x^2y^2z^2.$$

因此，若$x^4-y^4=z^2$有正整数解x，y，z，则存在整数边直角三角形，其面积为正方形数。

最后，若$x^4+y^4=z^4$，则$z^4-y^4=(x^2)^2$。

12·1 1。120个；2。60岁；3。2/5日；

4. 144/37时辰。

12·2 (b) 金，30.5迈纳；铜，9.5迈纳；锡，14.5迈纳；铁，5.5迈纳。

12·3 84岁。①

12·4 (a) 27.

(b) $5780 = \in'\psi\pi$.

$72803 = \zeta M\beta'\omega\gamma$.

$450082 = \mu M \in M\pi\beta$.

$3257888 = \tau M\kappa M \in M\zeta'\omega\pi\eta$.

12·5 (a) $\Delta^{Y}\Delta\beta\Delta^{Y}\iota\beta\overset{\circ}{M}\lambda\gamma \pitchfork K^{Y}\chi\alpha s\zeta$.

(b) $y\overline{a}\,k\overline{a}\,3\,bhay\overline{a}\,2\,bhak\,\overline{a}\,2\,bhaka$
13r $\overline{u}$ 8.

12·6 (a) Rq⌊Rc ⌊Rq68p2⌋ mRc⌊Rq68m2⌋⌋

(b) $\sqrt[3]{4+\sqrt{-11}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{-11}}$.

12·7 *A cub* − *B* 3 *in A quad* + *C plano* 4 *in A aequatur D solido* 2.

13·1 MMMMCCCCLXVII, DCCCLXXXIX.

13·3 (b) $(3660)_7$.

(c) $(1254626)_7$.

13·4 (b) $(43239)_{12}$.

---

①原题中的两个“五年”似应有一为“四年”才能得到这个答案。——译注

(*c*) $(179578432)_{12}$。

13·5 (*a*) $(653)_8$。

(*b*) 9，8，7。

(*c*) 不能。能。能。不能。

(*d*) 我们应有 $79=b^2+4b+2$，从而 $b=7$。

(*e*) 我们应有 $72=2b^3+2b^2$，从而 $b=3$。

13·6 (*a*) 用 a,b,c 表示这三个数字，则有 $49a+7b+c=81c+9b+a$，这里 a,b,c 都小于 7。

(*b*) 我们应有 $3b^2+1=t^2$，这里 t 和 b 都是正整数且 $b>3$。

(*c*) $b^2+2b+1=(b+1)^2$。

(*d*) $(2b^2+2b+1)(2b^2-2b+1)=4b^4+1$。

13·7 (*a*) 把 w 表为三进位制。

13·8 (*a*) 设 t 为十位数字，u 为个位数字。据题意有

$$2(5t+7)+u=(10t+u)+14。$$

这就是最后说出的结果，把戏就揭穿了。

(*b*) 设 h,t,u 表示百位、十位、个位数字。据题意有

$$2\{5[5(2h+3)+7]+t\}+u=200h+$$

$10t+u+235$,

这就是最后说出的结果，把戏就揭穿了。

(c) $h=9-u$, $t=9$。

14·3 在 BA 上任取一点 D'，在 CA 上取点 E''，使得 $CE''=BD'$。设圆 $D'(B)$ 与过 E'' 且平行于 BC 的直线交于 E'。过 E' 作直线平行于 AC，与 BA 交于 A'，与 BC 交于 C'。于是得到一个图形，相似于所求图形，以 B 为相似中心。

14·4 (a) 这里 $p=1$，$q=870$。

14·5 (b) 令 $x=2y$。

(c) 消去 x 和 y，得到 z 的三次方程。

(d) 考虑 x 的三次方程，其首项系数为 1，施以形如 $x=y+m$ 的线性变换，确定 m，使所得到的 y 的三次方程没有线性项，等等。

14·6 求 z，使得 $b/a=a/z$，然后求 m，使得 $c/z=a/m$。

14·7 (a) 正根为 2 与 4。

(b) 负根为 -1。

14·8 (a) 直线 $ay+bx+c=0$ 与三次曲线 $y=x^3$ 的交点横坐标就是所求实根。

(b) $x=1.7$。

(c) $x=-3.5$, 1, 2.5。

(e) $x=-6$, -2, -1。

15·1 (a) 我们用一个四位数字 N 来提出定理

的证明，推广是容易的。设N的千位、百位、十位和个位数字是a，b，c，d，则有

$$N=1000a+100b+10c+d.$$

设$S=a+b+c+d$，于是

$$N=999a+99b+9c+S=9(111a+11b+c)+S,$$

等等。

(b) 设M和N是两个自然数，盈数为e和f。于是存在整数m和n，使得

$$M=9m+e,\quad N=9n+f.$$

现在

$$M+N=9(m+n)+(e+f),$$

$$MN=9(9mn+ne+mf)+ef,$$

等等。

15·2 (a) 设M是已知数，N是M的各位数字重排而得的数。由于M和N由相同的数字组成，所以它们的盈数也相同〔据15·1 (a)〕。于是，我们有

$$M=9m+e,\quad N=9n+e,$$

$$M-N=9(m-n).$$

(b) 据15.2 (a)，最后的乘积必定被9整除，所以，据15.1 (a)，乘积中各位数字之和的盈数必定是0。

15·3 利用相似三角形。

15·4 (a) $x\doteq 2.3696$.

(b) $x=4.4934$。

15·6 (a) 利用数学归纳法，设所求关系对$n=k$为真，于是

$$\begin{aligned}u_{k+2}\ u_k&=(u_{k+1}+u_k)u_k\\&=u_{k+1}\ u_k+u^2_k\\&=u_{k+1}\ u_k+u_{k+1}\ u_{k-1}-(-1)^k\\&=u_{k+1}\ (u_k+u_{k-1})+(-1)^{k+1}\\&=u^2_{k+1}+(-1)^{k+1},\end{aligned}$$

等等。也可以利用15.6 (b) 中给出的u_n的表达式。

(b) 令$v_n=[(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n]/2^n\sqrt{5}$。

证明$v_n+v_{n+1}=v_{n+2}$，$v_1=v_2=1$。于是$v_n=u_n$。

(c) 利用15.6 (b) 给出的u_n和u_{n+1}的表达式，把分子和分母都除以$(1+\sqrt{5})^n$，再求$n\to\infty$时的极限。

(d) 利用15.6 (a) 给出的关系。

15·7 (a) A有$\frac{121}{17}$个德纳柔，B有$\frac{167}{17}$个德纳柔。

(b) 33天。这个问题也可以作为变数问题来解。

15·8 设x表示财产之值，y表示每个儿子得到的数额。于是长子得到$1+\frac{(x-1)}{7}$，次子得

到

$$2+\frac{x-\left(1+\frac{x-1}{7}\right)-2}{7}.$$

使这两个数相等我们求得$x=36$，$y=6$，儿子人数是$\frac{36}{6}=6$。

15·10　382个苹果。

16·1 (b) $H=(3ac-b^2)/9a^2$，$G=(2b^3-9abc+27a^2d)/27a^3$。

16·3 $x=4$，其余两个根都是虚数。

16·4 已经求得（见讲演正文）$a=6/b$，$c=b^3/6$，从而 $6/b+b+b^3/6=10$，等等。

16·5 $y^3+15y^2+36y=450$。

16·6 我们有$\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}=\sqrt{-2700}=30\sqrt{-3}$。

16·7 我们有 $16x^2=x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$。由此可得

$$x^2+x+1=\pm 4x,$$

可见　$x=(3\pm\sqrt{5})/2$，$(-5\pm\sqrt{21})/2$。

16·8 我们求得$y=3$（或-7），从而$x=4$。另外两个根是$-2\pm 5\sqrt{-3}$。

16·9 $y^6-6y^4-144y^2=2736$。

16·10 (a) 我们求得

$$m+h-k^2=b,\quad k(m-h)=c,\quad hm=d。$$

从头两个关系推出

$$2m=(k^3+bk+c)/k,\quad 2h=(k^3+bk-c)/k。$$

然后从第三个关系得到

$$(k^3+bk+c)(k^3+bk-c)=4dk^2,$$

即

$$k^6+2bk^4+(b^2-4d)k^2-c^2=0,$$

这是k^2的三次方程。

16·10 (b) 与四次方程

$$x^4-2x^2+8x-3=0$$

相应的k^2的三次方程为

$$k^6-4k^4+16k^2-64=0,$$

这个方程的一个根已知为$k^2=4$，所以$k=2$。由此得到

$$m=(k^3+bk+c)/2k=3,$$

$$h=(k^3+bk-c)/2k=-1，而$$

$$x^4-2x^2+8x-3=(x^2+2x-1)(x^2-2x+3)。$$

从而原来的四次方程的四个根是$-1\pm\sqrt{2}$和$1\pm\sqrt{-2}$。

17·1 (a)令$\log_b mn=p$，$\log_b m=q$，$\log_b n=r$。于是，$b^p=mn$，$b^q=m$，$b^r=n$，从而$b^p=mn=b^qb^r$

$=b^{q+r}$，因此$p=q+r$。

17·2 (a) 令$y=\log_a N$，$z=\log_b N$，$w=\log_b a$。于是，$a^y=N$，$b^z=N$，$b^w=a$。因此$b=a^{1/w}$，$b^z=a^{z/w}=a$，可见$y=z/w$。

(b) 令$y=\log_b N$，$z=\log_N b$。于是，$b^y=N$，$N^z=b$，从而$N=b^{1/z}=b^y$，可见$y=1/z$.

(c) 令$y=\log_N b$，$z=\log_{(1/N)}1/b$于是，$N^y=b$，$(1/N)^z=1/b$，从而$N=b^{1/z}=b^{1/y}$，可见$y=z$。

17·3 (a) $\log 4.26=1/2+1/8+1/256+\cdots$

$$=0.6294\cdots。$$

17·4 (b) $\cos c=\cos a\cos b$。

17·5 (a) $A=122°39'$，$C=83°5'$，$b=109°22'$。

(b) $A=105°36'$，$B=44°0'$，$c=78°46'$。

17·6 (a) 冰棍的木柄或压舌板都是绝好的算筹材料。

(b) 例如，589475除以1615. 把冠有1，6，1，5的算筹并排放在一起，如图58所示，然后据此求出这一除法的逐次偏商。

17·7 (b) 见练习17.1 (a) 与17.1 (b) 所述对数律。

17·8 把A尺放在D尺的正上方，参考练习17.1

(d) 所述对数律，其中$s=2$。

17·9 制作一把对数尺，其长恰为D尺的三分之一，把这样的三把短尺连接起来，称为K尺。然后把K尺放在D尺的正上方，参考练习17.1（d）所述对数律，其中$s=3$。

18·1 (a) 加速度是单位时间内速度的增量。

18·2 (a) 张开扇形规，使已知线段或其简单分数部分AA'卡在扇形规两臂上刻度均为100的两点之间（见图81）。于是，两臂上刻度均为20的两点间的距离就是AA'的五分之一。

(b)张开扇形规，使AA'/OA是所要的绘图比率（见图81）。于是，BB'就是原有长度OB的新长度。

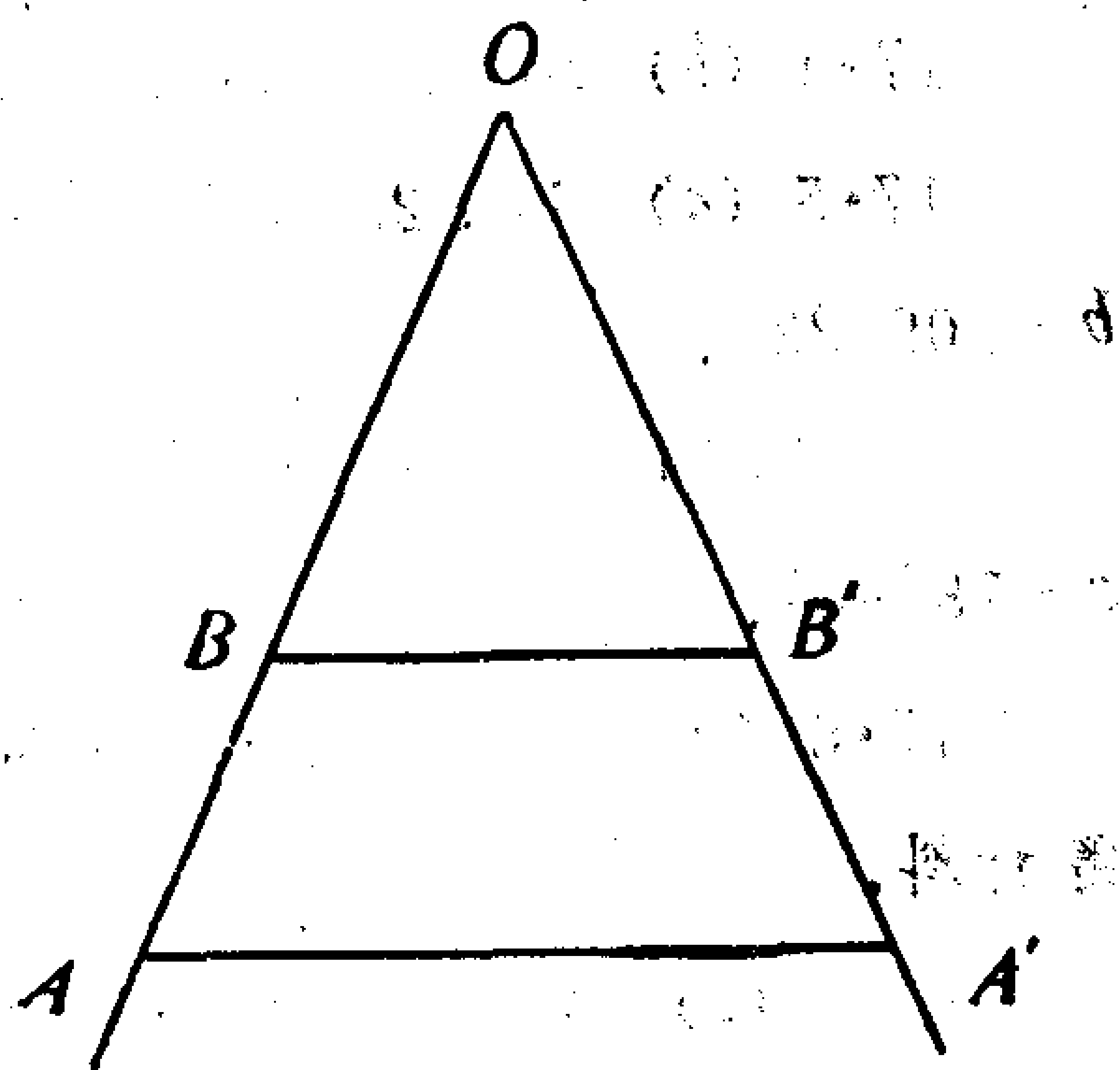


图81

18·3 (a) 把一条臂上刻度为a的点同另一条臂上刻度为b的点联结起来，过第一条臂上刻度为c的点画上面那条线的平行线，在另一臂上所截得的刻度就是所求的第四比例项。

(b) 张开扇形规，使两臂上刻度均为106的两

点间的距离等于150。于是，刻度均为100的两点间的距离就是一年前应存入的本金数额。如此操作五次就求得所要的本金数额。

18·4 小圆不仅滚动而且滑动。

18·5 利用一一对应关系$n \longleftrightarrow n^2$。

18·6 (*a*) 在近日点。

(*c*) 1000年。

(*d*) 25*A*.*U*。

18·7 (*a*) 两者周期相同。

(*b*) 1小时24分。

18·8 (*a*) 正n边形各顶点处的内角为

$$(n-2)180°/n.$$

如果各顶点处聚集了p个正n边形，则有

$$p(n-2)180°/n=360°,$$

即 $p=2+4/(n-2)$。

(*b*) 这里$p(n-2)180°/n=180°$，

即$p=1+2/(n-2)$。

18·9 例如，见H. Steinhaus, *Mathematical Snapshots* (New York: Oxford University Press, 1950) 以及M. Kraitchik, *Mathematical Recreations* (New York: W. W. Norton, 1942)。

18·10 (*c*) 椭圆$x^2/a^2+y^2/b^2=1$可以利用一个变换从圆$x^2+y^2=a^2$得出，使得在每一点处椭

圆的纵坐标是圆在同一点处纵坐标的b/a倍。

19·1 设P和P'是两个平面图形，满足卡瓦列里第一原理的假设，$f(x)$是P上与一条包围平行线相距x处的弦长，则$kf(x)$是P'上相应的弦长，k是某个比例常数。用A和A'表示P和P'的面积，则有

$$A=\int_0^h f(x)dx,\quad A'=\int_0^h kf(x)dx.$$

这里h是两条包围直线间的距离。由此可见，$A'=kA$。

19·2 见The American Mathematical Monthly, Jan. 1942，问题E465。

19·3 用过圆柱轴线的平面p把蹄形分成两个相等的部分，用A表示蹄形上所得剖面的面积。作一个直棱柱，底面是面积为A的正方形，位于平面p上，高为圆柱的半径r。从这个棱柱体上切下一个棱锥，其底面是不在平面p上的、棱柱的那个底面，其顶点位于棱柱的另一底上。这个有凿孔的棱柱体就可以作为半蹄形的比较图形。

还可以选一个立体作为半蹄形的比较图形，这个立体的高为r，下底是一个直角三角形，两条直角边为r和h，上底是与下底斜边平行且相等的线段。

于是，蹄形的体积是$2hr^2/3$。

19·5 设AB和CD是空间中两条线段，使得：（1）$AB=CD=2r\sqrt{\pi}$，（2）AB和CD都垂直于其中点联线，（3）中点联线之长为$2r$，（4）AB垂直于CD。于是，四面体$ABCD$可以作为比较多面体。

19·6 把环面放在与其轴线垂直的平面p上，以半径为r、高$2\pi c$的直圆柱作为比较图形，使之沿纵长方向放在平面p上。以平行于p的平面来截环面及圆柱；环面上的截面A是一个圆环，其内外半径例如为a和b；圆是上的截面A'是一个矩形，其长为$2\pi c$，宽设为w。于是

$$A=\pi a^2-\pi b^2=\pi(a^2-b^2)$$
$$=\pi(a+b)(a-b)$$
$$=2\pi c(a-b),$$
$$A'=2\pi cw=2\pi c(a-b).$$

既然$A=A'$，可见环面的体积等于圆柱的体积，即是

$$V=\pi r^2(2\pi c)=2\pi^2r^2c.$$

19·7 (*a*) 见图82。

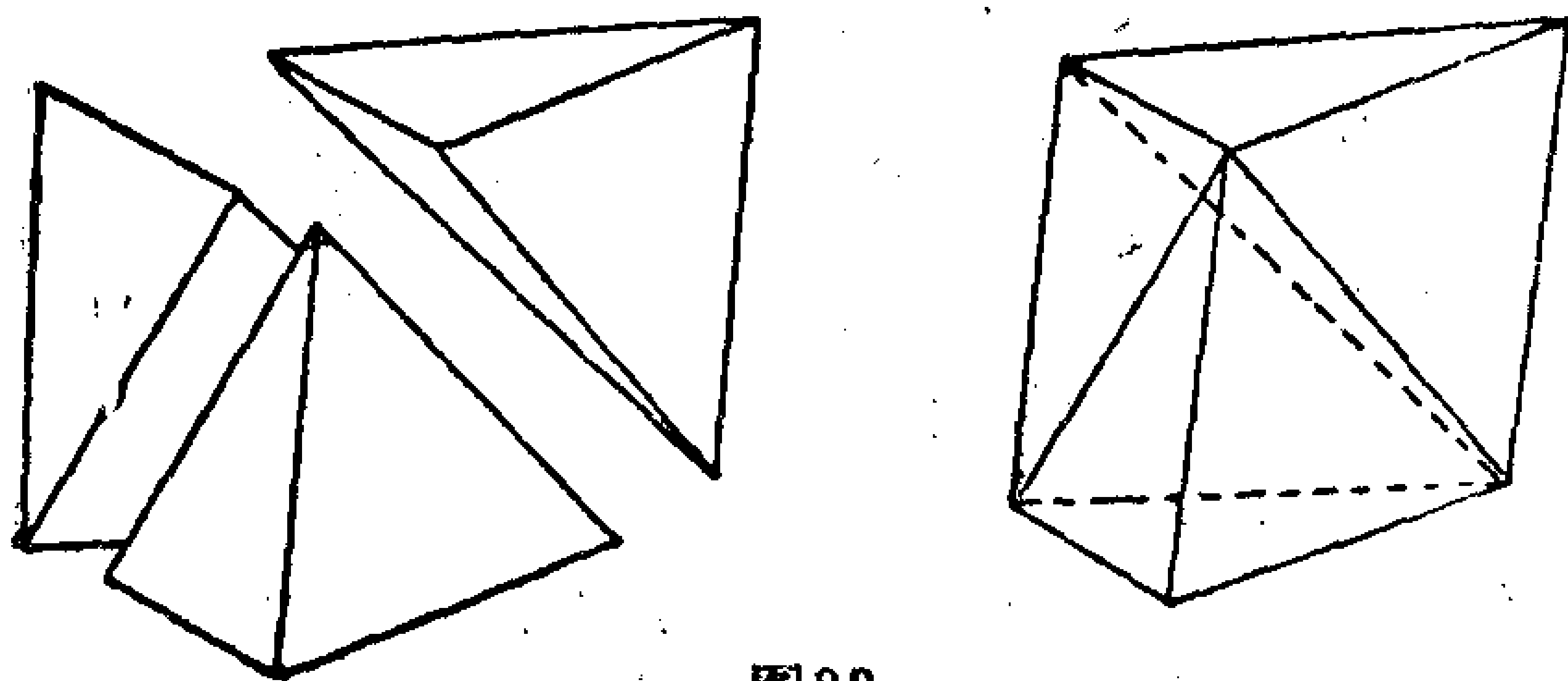


图82

19·8 (b) 如果截面面积是与一个底面的距离的二次函数，那么这个面积是三个量的代数和①：一个是棱柱的常值截面面积，另一个是楔形体的截面面积（与离底面的距离成反比），还有一个是棱锥的截面面积（与离底面的距离平方成正比）。因此，广义棱柱体的体积等于棱柱、楔形体以及棱锥的体积的代数和，然后再应用问题（a）的结果。

（c）设$A(x)=ax^2+bx+c$，然后证明

$$V=\int_0^h A(x)dx=h\left[A(0)+4A\ (h/2)+A(h)\right]/6.$$

19·9 (b) 椭球

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1,$$

用离 xy 平面的距离为 z 的平面相截，所得的截面是椭圆

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1-z^2/c^2,$$

其半轴为

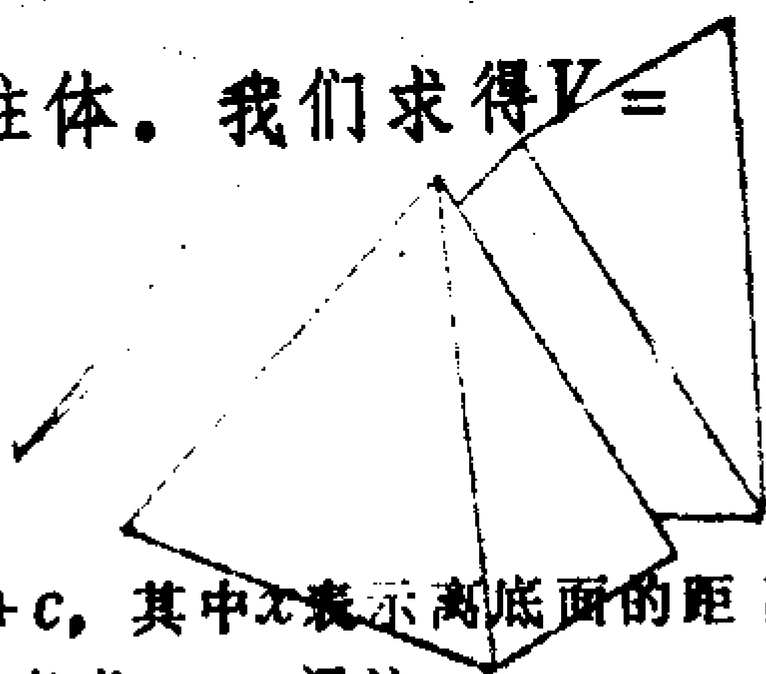
$$(a/c)\sqrt{c^2-z^2}\ 和\ (b/c)\sqrt{c^2-z^2}.$$

这个椭圆的面积是

$$\pi ab(c^2-z^2)/c^2,$$

这就说明椭球体是广义棱柱体。我们求得$V=4\pi abc/3$。

（c） $V=16r^3/3$。



① 例如，$A(x)=ax^2+bx+c$，其中x表示离底面的距离，a，b，c是常数，所以可以有下文的考虑。——译注

19·10.否。考虑两个正方形棱柱体P和P'，高度相同，P是直棱柱，P'是斜棱柱，但有两个侧面垂直于底面。

这个例子警告我们：直观有时会使人误入歧途。人们可能会把P和P'的侧面都视为（构成P和P'截面周长的）若干正方形细线圈拼合而成。由于这些线圈长度全都一样，而且P和P'有同样多的线圈，所以人们也许会得到结论说；P和P'有相等的侧面积。

20·1 (*a*) 利用正交投影把椭圆投影为圆。椭圆上具有最大面积的三角形投影为圆上具有最大面积的三角形。但是，圆内接三角形具有最大面积的充要条件是：该三角形为等边三角形；而三角形为等边三角形的充要条件是：其重心与圆心重合。

(*b*) 利用正交投影把椭圆投影为圆。椭圆上的变弦投影为圆上的变弦，截出具有常值面积的圆内弓形。但这条变弦的包络是同心圆。

20·3 (*b*) 例如见 Nathan Altshiller-Court, *Modern Pure Solid Geometry* (New York: Macmillan, 1935)。

20·4 利用中点及距离公式。

20·5 把直角三角形放在笛卡尔直角坐标架上，使两条直角边与坐标架两条正轴重合。

20·6 可以把三角形放在笛卡尔直角坐标架上，

使底边在x轴上，而对应顶点在正y轴上。

20·7 (b)成立。

20·8 取两个礁石的联线为笛卡尔直角坐标架的x轴，而以联线中点为原点。

20·9 用笛卡尔斜坐标系的（0，0），(3，0)，（0，3）来表示A，B，C。

20·10 把A的轨迹取为笛卡尔直角坐标架的y轴，B的轨迹取为x轴。若$AP=a$，$PB=b$，则P的轨迹为椭圆$x^2/a^2+y^2/b^2=1$。（这就产生了所谓的**椭圆规作图法**，可以画已知两半轴的椭圆。绘图员就有这样画椭圆的器械。）

索　引

（按汉语音序排列，数字表示页数）

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

M

N

O

P

Q

R

T

W

X

Y

Z